

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
BIBLIOTECA UNIVERSITÁRIA**

Luís Filipe Pereira Silva

**CONTROLE DE SISTEMAS NÃO LINEARES  
DISCRETOS NO TEMPO COM ATRASO VARIANTE  
NOS ESTADOS UTILIZANDO MODELOS DO TIPO  
FUZZY T-S**

Florianópolis

2016



Luís Filipe Pereira Silva

**CONTROLE DE SISTEMAS NÃO LINEARES  
DISCRETOS NO TEMPO COM ATRASO VARIANTE  
NOS ESTADOS UTILIZANDO MODELOS DO TIPO  
FUZZY T-S**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas para a obtenção do Grau de Doutor em Engenharia de Automação e Sistemas.

Orientador: Prof. Dr. Eugênio de Bona Castelan Neto

Coorientador: Prof. Dr. Valter Junior de Souza Leite

Florianópolis

2016



Luís Filipe Pereira Silva

**CONTROLE DE SISTEMAS NÃO LINEARES  
DISCRETOS NO TEMPO COM ATRASO VARIANTE  
NOS ESTADOS UTILIZANDO MODELOS DO TIPO  
FUZZY T-S**

Esta Tese foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Doutor em Engenharia de Automação e Sistemas”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas.

Florianópolis, 24 Fevereiro 2016.

---

Prof. Dr. Eugênio de Bona Castelan Neto  
Orientador

---

Prof. Dr. Valter Junior de Souza Leite  
Coorientador

---

Prof. Dr. Rômulo Silva de Oliveira  
Coordenador do Curso

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Dr. Eugênio de Bona Castelan Neto  
Presidente

---

Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Júnior  
DEE/UFRGS



---

Prof. Dr. Jean-Claude Hennet  
LSIS Marseille UMR 7296

---

Prof. Dr. Alexandre Trofino Neto  
DAS/UFSC

---

Prof. Dr. Daniel Ferreira Coutinho  
DAS/UFSC

---

Prof. Dr. Ubirajara Franco Moreno  
DAS/UFSC





Dedico este trabalho aos meus pais e ao  
meu irmão.



## AGRADECIMENTOS

A Deus.

À minha família que sempre me incentivou e nunca mediu esforços para que eu conseguisse alcançar esse objetivo.

Ao Prof. Eugênio por toda dedicação em me orientar. Além disso, pela amizade demonstrada desde o primeiro momento em que cheguei em Florianópolis e claro pela paciência de estar sempre me mostrando o caminho mais seguro a seguir na pesquisa.

Ao Prof. Valter que abriu as portas para que eu pudesse alcançar meus objetivos. Nunca saiu da minha memória a conversa que tivemos quando ele me ofereceu a oportunidade de ir fazer meu doutorado na UFSC com o Prof. Eugênio. Posso dizer que nesse período vivi experiências únicas e fui muito feliz.

Ao meu parceiro e amigo Michael. Sempre trabalhamos em paralelo nas nossas pesquisas e você me ajudou muito a amadurecer os conceitos de fuzzy Takagi-Sugeno. Filho, acredito que eu não tenha contribuído na sua pesquisa como você contribuiu para minha, espero um dia retribuir tudo que você por mim.

Às minhas grandes amigas Tanísia e Vanessa. Logo no início em que cheguei a Florianópolis, vocês me ajudaram muito. Nunca esquecerei o que vocês fizeram por mim e todo carinho, dedicação e amizade que tiveram por mim.

A todos os meus amigos do DAS, tanto o pessoal do mestrado quanto do doutorado. Os momentos de descontração, as baladas, os churrascos tornaram a minha vida em Florianópolis muito mais suave.

Aos amigos com quem dividi apartamento, Rômulo, Levi, Andre e Gustavo. Apreendi muito com vocês.

À CAPES e ao CEFET-MG por todo suporte fornecido a mim.

À UFSC e ao DAS pela grande oportunidade que me deram de conviver com o grupo de pesquisadores extremamente competentes e renomados.

Ao Ênio por sempre me ajudar em assuntos burocráticos com bastante eficiência.

A todos os meus amigos que fizeram parte da minha vida em Hong Kong.



A persistência é o menor caminho do êxito.  
(Charles Chaplin)



## RESUMO

Nesta tese são desenvolvidos resultados de síntese de controladores fuzzy para a estabilização local de sistemas não lineares discretos no tempo com atraso variante nos estados. Para a utilização desses resultados é necessário em um primeiro momento obter-se a representação por modelos fuzzy dos sistemas não lineares. Essa modelagem fuzzy proporciona a obtenção de modelos fuzzy T-S que representam os sistemas não lineares de forma exata no interior de uma região no espaço de estados, chamada de região de validade. As informações dessa região de validade são levadas em consideração na etapa de projeto e, assim, têm-se condições de estabilização locais. Em consequência disso, é proposta uma metodologia original para estimar regiões de estabilidade assintótica tais que as trajetórias dos sistemas não lineares em malha fechada iniciadas a partir de condições iniciais pertencentes a essas regiões de estabilidade sejam assintoticamente estáveis. Vale destacar que na metodologia proposta é feito o desacoplamento do vetor de condições iniciais e, dessa forma, trabalha-se na estimativa de duas regiões: uma para tratar as condições iniciais em  $k = 0$  e a outra para lidar com as sequências de condições iniciais atrasadas. Para o desenvolvimento das condições de síntese, utilizam-se candidatas à função de Lyapunov-Krasovskii (L-K) que são dependentes das funções de pertinência dos modelos fuzzy e são compostas de matrizes de Lyapunov inversas. Além disso, essas condições são propostas como desigualdades matriciais lineares. Ressalta-se que são propostas três leis de controle: *i)* para a primeira realimentam-se o vetor de estados atual e o vetor de estados afetado pelo atraso variante no tempo; *ii)* para a segunda têm-se a realimentação do vetor de estados atual e do vetor de estados afetado pelo atraso máximo; e *iii)* para a última calculam-se ganhos de realimentação de todos os vetores de estados. Comparações entre os resultados originais desenvolvidos e condições encontradas na literatura são realizadas por meio de exemplos numéricos. Vale destacar também que uma extensão do resultado referente à primeira lei de controle é apresentada, na qual sintetizam-se controladores fuzzy T-S para estabilização local no sentido  $\ell_2$  de sistemas não lineares discretos no tempo com atraso nos estados afetados por um sinal de perturbação  $\ell_2$ .

**Palavras-chave:** Sistemas não lineares discretos no tempo com atraso nos estados. Função fuzzy de Lyapunov-Krasovskii. Desigualdades Matriciais Lineares.





## ABSTRACT

This thesis proposes design conditions for Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy controllers guaranteeing local stabilization of nonlinear discrete time systems with time-varying delay in the states. To use this results, in a first moment it is necessary to obtain a representation fuzzy models of the nonlinear systems. This modeling provides T-S fuzzy models that represent the nonlinear systems of exact form inside of a region in the states space, called region of validity. The informations about this region of validity are taken into account in the conditions of local stabilization. In consequence, we propose an original methodology to estimate regions of asymptotic stability such that the trajectories of the the closed-loop nonlinear systems initialized from initial conditions belonging to this region of stability are asymptotically stable. We highlight that the proposed methodology is done by the decoupling of vector initial conditions, therefore, we work on the estimation of two regions: one to treat the initial conditions in  $k = 0$  and other to deal with sequences of delayed initial conditions. For the synthesis conditions development, we use Lyapunov-Krasovskii (L-K) fuzzy candidates that are membership functions dependents and are composed of Lyapunov matrices inverse. Furthermore, these conditions are proposed as linear matrix inequalities. We highlight that the proposed control laws have differences, which: *i)* for one these control laws feedback the current states vector and the affected states vector by the time-varying delay; *ii)* for the other control law, we have feedback of current states vector and affected states vector by the maximum delay; and *iii)* the last control law we compute feedback gains of all the states vectors. The comparisons among the original results development and conditions found in the literature are realized from numerical examples. We also highlight that an extension about the result referent to the control law that feedbacks current the states vector and affected the states vector by the time-varying delay is shown, which we design T-S fuzzy controllers for local stabilization in  $\ell_2$  sense of nonlinear discrete time systems with time-varying delay in the states affected by perturbation signals  $\ell_2$ .

**Keywords:** Nonlinear discrete time systems with time-varying delay in the states. Lyapunov-Krasovskii fuzzy function. Linear matrix inequalities.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Região de atração particular.....	53
Figura 2	Regiões $R_{AP}$ , $\mathcal{E}(P)$ , $\mathcal{C}_\varphi$ e $\mathcal{V}_0$ .....	59
Figura 3	Regiões $\mathcal{E}(P)$ , $\mathcal{C}_x$ , $\mathcal{C}_\varphi$ e $\mathcal{V}_0$ .....	59
Figura 4	Conjuntos $\mathcal{C}_x = \mathcal{L}_{V_1}$ e $\mathcal{V}_0$ e condições iniciais instáveis..	82
Figura 5	Conjunto $\mathcal{C}_x = \mathcal{L}_{V_1}$ e oito trajetórias.....	83
Figura 6	Trajetoária de estado.....	84
Figura 7	Trajetoária de estado.....	85
Figura 8	Sinais de perturbação e trajetórias dos estados.....	87
Figura 9	Trajetoária estado não ISS.....	88
Figura 10	Conjuntos $\mathcal{V}_0$ , $\mathcal{C}_{x1}$ e $\mathcal{C}_{x2}$ . ....	103
Figura 11	Estimação de $\mathcal{C}_x$ em função de $\ \phi_{5,0}\ _5$ . ....	105
Figura 12	$\mathcal{V}_0$ , $\mathcal{C}_x$ e trajetórias de estados.....	107
Figura 13	Conjuntos $\mathcal{L}_{V_1}$ e $\mathcal{C}_x$ , e uma trajetória de estado. ....	109
Figura 14	Comparação complexidades numéricas em função de $\bar{d}$ . ....	121
Figura 15	Comparação complexidades numéricas em função de $N$ . ....	121
Figura 16	Conjuntos $\mathcal{V}_0$ , $\mathcal{C}_{x1}$ e $\mathcal{C}_{x2}$ . ....	123
Figura 17	$\mathcal{V}_0$ , $\mathcal{C}_x$ e trajetórias de estados.....	126
Figura 18	Elemento $\alpha_{1,k}$ do vetor de função de pertinência. ....	156
Figura 19	Elemento $\alpha_{2,k}$ do vetor de função de pertinência. ....	157
Figura 20	Elemento $\alpha_{3,k}$ do vetor de função de pertinência. ....	157
Figura 21	Elemento $\alpha_{4,k}$ do vetor de função de pertinência. ....	158
Figura 22	Vetor de função de pertinência levitador magnético ....	159



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Comparação de tamanhos de $\mathcal{L}_{V_1}(\delta^{-1})$ . . . . .	88
Tabela 2	Resultados de condições de síntese de controladores . . .	102
Tabela 3	Comparação dos tamanhos das regiões de estabilidade	105
Tabela 4	Comparação das condições dos capítulos 4 e 5 . . . . .	124



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

T-S	Takagi-Sugeno .....	27
LPV	Parâmetros Variantes no Tempo (do inglês <i>Linear Parameters Variants</i> ) .....	27
L-K	Lyapunov-Krasovskii .....	28
LMIs	Desigualdades Matriciais Lineares (do inglês <i>Linear Matrices Inequalities</i> ) .....	35
$R_A$	Região de atração .....	55
$R_S$	Região assintoticamente estável .....	55
$R_{AP}$	Região de atração particular .....	58
ISS	Estabilidade entrada saída (do inglês <i>Input-to-State Stability</i> ) .....	61
ACC16	<i>American Conference Control 2016</i> .....	133





## NOTAÇÕES

$\subset (\subseteq)$	Subconjunto (Subconjunto ou igual)
$\in$	Pertence
$\forall$	Para todo
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números Naturais
$\mathbb{N}^*$	Conjunto dos números exceto o zero
$\mathbb{R}^n$	Vetor real de dimensão $n$
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Matriz real de dimensão $n \times m$
$E_j$	$j$ -ésimo subespaço de vetores que pertencem a uma sequência $\mathbb{R}^n$ , ou seja, $E_j \subseteq \mathbb{R}^n$
$E_\phi$	Espaço de sequências em que o elemento desse espaço é euclidiano, ou seja, $E_\phi = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_d$ , $E_j \subseteq \mathbb{R}^n$
$E_\varphi$	Espaço de sequências definido como $E_\varphi = E_\phi \times E_{d+1}$ , com $E_{d+1} \subseteq \mathbb{R}^n$
$x_k$	Vetor de estados no instante $k$
$x_{i,k}$	$i$ -ésimo elemento do vetor $x_k$
$d$	Atraso do sistema, $d \in \mathbb{N}^*$
$\phi_{d,k}$	Sequência de vetores de estados atrasados, ou seja, $\phi_{d,k} = \{x_{k-d}, \dots, x_{k-1}\} \in E_\phi$
$[\phi_{d,k}]_j$	$j$ -ésimo elemento de $\phi_{d,k}$ : $[\phi_{d,k}]_j = x_{k+j-(d+1)} \in E_j$ , $j \in \mathcal{I}[1, d]$
$\varphi_{d,k}$	Condição inicial de um sistema com atrasos no instante $k$ , definido com a sequência $\varphi_{d,k} = \{\phi_{d,k}, x_k\} \in E_\varphi$
$[\varphi_{d,k}]_j$	$j$ -ésimo elemento de $\varphi_{d,k}$ : $[\varphi_{d,k}]_j = x_{k+j-(d+1)} \in E_j$ , $j \in \mathcal{I}[1, d+1]$
$X_{(i)}$	$i$ -ésima linha da matriz $X$
$A^T(a^T)$	Matriz(vetor) transposta(o) de $A(a)$
$A^{-1}$	Matriz inversa de $A$
$\ A\ $	Norma euclidiana da matriz $A$
$A > B$	Para duas matrizes, $A - B$ é definida positiva
$A \geq B$	Para duas matrizes, $A - B$ é semi-definida positiva
$\text{diag}\{A, B\}$	Matriz bloco diagonal, com os blocos diagonais princi-

para  $A$  e  $B$

**I** (**0**)      Matrix identidade (nula) com dimensões apropriadas

$\star$       Indica bloco simétrico nas LMIs

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	27
1.1	MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA	29
1.2	ESTADO-DA-ARTE DA LITERATURA CIENTÍFICA	30
1.3	OBJETIVOS DE PESQUISA	33
1.4	METODOLOGIA	34
1.5	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	35
<b>2</b>	<b>MODELAGEM FUZZY T-S E SISTEMAS NÃO LINEARES COM ATRASO NOS ESTADOS</b>	<b>37</b>
2.1	INTRODUÇÃO	37
2.2	MODELAGEM FUZZY T-S PARA SISTEMAS NÃO LINEARES DISCRETOS NO TEMPO COM ATRASO NOS ESTADOS	39
2.2.1	Exemplo – Parte I	43
2.2.1.1	Sistemas acadêmicos	43
2.2.2	Sistema com motivação prática	45
2.3	ANÁLISE DE ESTABILIDADE E SÍNTESE DE CONTROLADORES	47
2.3.1	Exemplo - Parte II	52
2.4	VALIDADE LOCAL DA REPRESENTAÇÃO FUZZY T-S E ESTIMAÇÃO DO DOMÍNIO DE ATRAÇÃO	53
2.4.1	Região de atração e região assintoticamente estável	55
2.4.2	Problema de otimização	57
2.4.3	Exemplo – Parte III	58
2.5	CONCLUSÕES	60
<b>3</b>	<b>ESTABILIZAÇÃO LOCAL POR REALIMENTAÇÃO DOS ESTADOS ATUAL E ATRASADO</b>	<b>61</b>
3.1	FORMULAÇÃO DOS PROBLEMAS	62
3.2	RESULTADOS PRELIMINARES	65
3.3	RESULTADOS PRINCIPAIS	72
3.3.1	Estabilização local	72
3.3.1.1	Problema de otimização	76
3.3.2	Estabilização local $\ell_2$	77
3.3.2.1	Perturbação admissível	79
3.3.2.2	Atenuação de perturbação	79
3.4	EXEMPLOS NUMÉRICOS	80
3.4.1	Estabilização local	80

3.4.1.1	Sistemas acadêmicos . . . . .	80
3.4.1.2	Sistema com motivação prática . . . . .	82
<b>3.4.2</b>	<b>Estabilização local <math>\ell_2</math> . . . . .</b>	<b>85</b>
3.4.2.1	Perturbação admissível . . . . .	86
3.4.2.2	Atenuação de perturbação . . . . .	88
3.5	CONCLUSÕES . . . . .	89
<b>4</b>	<b>ESTABILIZAÇÃO LOCAL VIA REALIMENTAÇÃO DO VETOR DE ESTADOS ATUAL E COM ATRASO MÁXIMO . . . . .</b>	<b>91</b>
4.1	COLOCAÇÃO DO PROBLEMA . . . . .	92
4.2	RESULTADOS PRELIMINARES . . . . .	94
4.3	RESULTADO PRINCIPAL . . . . .	96
<b>4.3.1</b>	<b>Problema de otimização convexa . . . . .</b>	<b>101</b>
4.4	EXEMPLOS NUMÉRICOS . . . . .	101
<b>4.4.1</b>	<b>Sistema acadêmico . . . . .</b>	<b>101</b>
<b>4.4.2</b>	<b>Sistema com motivação prática . . . . .</b>	<b>104</b>
4.5	CONCLUSÕES . . . . .	108
<b>5</b>	<b>ESTABILIZAÇÃO LOCAL VIA ABORDAGEM SISTEMA AUMENTADO CHAVEADO . . . . .</b>	<b>111</b>
5.1	COLOCAÇÃO DO PROBLEMA . . . . .	111
5.2	RESULTADOS PRELIMINARES . . . . .	113
5.3	RESULTADO PRINCIPAL . . . . .	117
<b>5.3.1</b>	<b>Problema de otimização convexa . . . . .</b>	<b>119</b>
<b>5.3.2</b>	<b>Comparações complexidade numéricas . . . . .</b>	<b>119</b>
5.4	EXEMPLOS NUMÉRICOS . . . . .	122
<b>5.4.1</b>	<b>Sistema acadêmico . . . . .</b>	<b>122</b>
<b>5.4.2</b>	<b>Sistema com motivação prática . . . . .</b>	<b>123</b>
5.5	CONCLUSÕES . . . . .	126
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>129</b>
6.1	ARTIGOS PUBLICADOS E SUBMETIDOS . . . . .	132
6.2	PROPOSTA PARA TRABALHOS FUTUROS . . . . .	133
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>135</b>
	<b>APÊNDICE A – Ferramentas . . . . .</b>	<b>147</b>
	<b>APÊNDICE B – Descrição da modelagem fuzzy dos exemplos utilizados . . . . .</b>	<b>155</b>
	<b>APÊNDICE C – Manipulações algébricas . . . . .</b>	<b>163</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Nas duas últimas décadas, a comunidade de sistemas de controle tem vivenciado o desenvolvimento e a aplicação de técnicas fuzzy para o projeto de sistemas de controle não lineares. Em particular, as técnicas baseadas no modelo de Takagi-Sugeno (T-S) têm recebido especial atenção, pois é um tipo de modelagem que permite representar, seja de forma exata, seja de forma aproximada, o sistema não linear a controlar.

Um modelo fuzzy T-S descreve um sistema não linear por um conjunto de regras fuzzy SE-ENTÃO na forma de modelos locais lineares ou afins, que são conectados pela função de pertinência fuzzy (GAO et al., 2012; FENG, 2009). Essa função de pertinência pode possuir três tipos de dependência: do tempo, dos estados ou das entradas do sistema. A partir da função de pertinência, são calculados os parâmetros que fazem a interpolação dos modelos locais lineares ou afins. Portanto, um modelo fuzzy T-S representa uma classe de sistemas com parâmetros variantes. Isso resulta em uma estrutura com grandes vantagens na análise de estabilidade e na sintonia de controladores para sistemas de controle fuzzy, pois permite utilizar e desenvolver ferramentas de análise e síntese baseando-se na teoria de estabilidade de Lyapunov de sistemas lineares e de sistemas lineares com parâmetros variantes (LPV) , por exemplo.

O modelo fuzzy T-S pode descrever o sistema original não linear de forma exata ou aproximada. Para o método de representação exata são necessários  $2^p$  modelos locais, em que “ $p$ ” representa o número de “premissas” do modelo fuzzy T-S e a função de pertinência é obtida diretamente do sistema não linear original. Por esse ser o método utilizado nesta tese para a obtenção de modelos fuzzy T-S, ele é abordado com mais detalhes no Capítulo 2. Para o método de representação aproximada, uma das formas de se trabalhar é a apresentada em (TEIXEIRA; ZAK, 1999), em que para cada ponto de operação considerado, obtém-se um modelo linear aproximado e a função de pertinência é, em geral, estimada a partir do comportamento dinâmico do sistema não linear original. O número de regras fuzzy nesse caso está diretamente relacionado ao número de pontos de operação considerados e, assim, esse número de regras influencia diretamente na precisão do modelo fuzzy T-S, ou seja, quanto maior o número de pontos de operação, menor o erro de aproximação entre o sistema não linear e o modelo T-S. Dessa forma, o uso reduzido de regras pode influenciar seriamente no desempenho ou, até mesmo, causar instabilidade no sistema não linear

em malha fechada com controlador fuzzy. Uma discussão esclarecedora sobre modelagem fuzzy é realizada em (GUERRA; KRUSZEWSKI; LAUBER, 2009).

A modelagem fuzzy T-S permite não apenas considerar a classe de sistemas não lineares discretos no tempo  $x_{k+1} = f(x_k)x_k + g(x_k)u_k$ , em que  $f(\cdot)$  e  $g(\cdot)$  são funções dos estados, como também levar em consideração outros tipos de sistemas e, em especial, os não lineares discretos no tempo com atraso nos estados, sendo esses o objeto de pesquisa abordados nesta tese. Vale salientar que o atraso se faz presente em vários sistemas reais como, por exemplo, em processos químicos, térmicos e sistemas de comunicação. A presença do atraso pode causar deterioração da *performance* ou, até mesmo, perda da estabilidade do sistema de controle. Esse tema também vem recebendo bastante atenção da comunidade científica. Uma das formas de tratar a estabilidade e desempenho frente ao atraso é a partir de funções de Lyapunov-Krasovskii (L-K) (NICULESCU, 2001) (RICHARD, 2003), para o caso discreto no tempo, sendo que essas são uma extensão da função de Lyapunov para o caso sem atraso.

É interessante destacar que, por construção, um modelo fuzzy T-S pode representar de forma exata o sistema não linear a ser controlado num domínio de operação restrito no espaço de estados. Essa característica se torna bastante relevante quando se tem interesse em aplicações práticas, visto que muitas plantas físicas podem ser representadas por sistemas não lineares com restrições nas variáveis de estados devido a, por exemplo, condições seguras de operação e/ou restrições físicas das próprias plantas. Por conveniência, o domínio de operação pode ser escolhido de acordo com as restrições citadas. Vale ressaltar que são poucos os autores que propoem resultados em que restrições dos sistemas não lineares a controlar e a representação local exata desses sistemas por modelos fuzzy T-S são levadas em consideração.

Ao se considerar o domínio de operação na representação de um sistema não linear via modelo fuzzy T-S, deve-se estar ciente que nesse caso trabalha-se com o conceito de estabilidade local e, em consequência, com a definição de conjuntos contrativos. A noção de conjuntos contrativos é básica para determinar regiões de estabilidade assintótica para um dado sistema não linear. Para o caso sem atraso, a determinação das regiões de estabilidade assintótica associada a um sistema não linear é realizada via funções de Lyapunov. Dessa forma, são encontradas regiões em que condições iniciais admissíveis geram trajetórias que convergem assintoticamente para a origem (GOMES DA SILVA JR. et al., 2014).

No contexto de sistemas não lineares com atraso, ao se levar em consideração a região de validade do modelo fuzzy T-S, trabalha-se também com os conjuntos contrativos e com a determinação de regiões de estabilidade, como no caso de sistemas não lineares sem atraso. Porém, para o caso com atraso é necessário um tratamento para o vetor de condições iniciais, que engloba tanto os estados no instante de amostragem inicial quanto os estados atrasados. Isso dificulta a determinação de regiões de estabilidade, além de proporcionar resultados conservadores do ponto de vista de tamanho dessas regiões. Dessa forma, faz-se necessário um investimento no desenvolvimento de métodos menos conservadores de determinar regiões de estabilidade para sistemas de controle não lineares com atraso. Uma forma de determinar essas regiões é a partir de funções de Lyapunov-Krasovskii (L-K), utilizada neste documento de tese.

## 1.1 MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA

Levando-se em consideração a discussão realizada até o momento, observa-se que um cuidado a ser tomado ao se trabalhar com sistemas não lineares representados por modelos fuzzy T-S se refere à validade local destes ao representarem aqueles. Essa validade do modelo fuzzy T-S pode estar vinculada a limitações da planta em que foi obtido o sistema não linear ou, até mesmo, ser imposição do próprio método de modelagem fuzzy T-S utilizado. Isso leva a que, em muitas situações, não se pode ter uma representação exata do sistema não linear via modelo fuzzy T-S em todo o espaço de estados. Diante disso, resultados obtidos de análise de estabilidade e de síntese de controladores podem não representar de fato características do sistema não linear quando as trajetórias desse excursionam fora da região de validade. Dessa forma, percebe-se que se faz necessária a realização de pesquisa com o objetivo de desenvolver condições de análise de estabilidade e de síntese de controladores em que o domínio de operação seja levado em consideração e, assim, seja possível estimar regiões de estabilidade.

Na literatura de sistemas lineares com atraso nos estados e com saturação do atuador, o cálculo da região de estabilidade já é consagrado. Diante disso, pode-se estender a metodologia utilizada para obtenção de resultados para esses sistemas com saturação do atuador para modelos fuzzy T-S locais. Porém, analisando os resultados encontrados na literatura, percebe-se que os mesmos são bastante conservadores do ponto de vista de tamanho das regiões de estabilidade estimadas. Por-

tanto, o desenvolvimento de métodos de caracterização da região de estabilidade mais especializados que forneçam resultados menos conservadores, ou seja, regiões de estabilidade mais próximas das regiões de atração se faz necessário.

## 1.2 ESTADO-DA-ARTE DA LITERATURA CIENTÍFICA

Nesta seção é apresentada uma revisão bibliográfica, na qual, faz-se, primeiramente, uma contextualização do uso da modelagem fuzzy T-S. Em seguida, aborda-se o tema de sistemas com atraso nos estados. Após, comentam-se alguns resultados recentes que utilizam modelos fuzzy T-S com atraso nos estados. Na sequência, apresenta-se uma justificativa para o uso do domínio de operação e trata-se também de resultados de estabilidade local para sistemas com saturação, sendo que alguns conceitos que são comumente utilizados nesse domínio são de interesse e podem ser adaptados para a classe de sistemas não lineares representados por modelos fuzzy T-S. Por último, são apresentados alguns artigos que já tratam a representação exata de um sistema não linear por modelos fuzzy T-S.

As técnicas fuzzy têm sido largamente utilizadas com sucesso na modelagem de sistemas não lineares e em controle. Dentre as abordagens de controle fuzzy baseadas em modelo, o modelo fuzzy Takagi-Sugeno (T-S), proposto em (TAKAGI; SUGENO, 1985), é um dos mais populares e convenientes para tratar sistemas com não linearidades complexas. Existem muitas aplicações de sucesso na síntese de controladores, como pode ser visto em (WU et al., 2010), (DONG; YANG, 2011) e (LEE; PARK; JOO, 2011). Nos artigos (ZHANG et al., 2011) e (SUNG et al., 2012) é levado em consideração que os sistemas apresentam incertezas limitadas em norma. Para exemplificar a versatilidade da modelagem fuzzy T-S, cita-se (KHAIRY; ELSHAFEI; EMARA, 2010) que trata do controle preditivo a partir de modelos fuzzy T-S e (ZHANG; SHI; XIA, 2010), que aborda a estratégia de controle *sliding-mode* com a modelagem fuzzy T-S. Nesse último, também são levadas em consideração incertezas no sistema limitadas em norma.

Sistemas dinâmicos com atraso são comuns em processos industriais, especialmente quando há a transferência de massa, energia e/ou informação. O resultado disso é a frequente deterioração da *performance*, assim como a perda de estabilidade de sistemas de controle, caso o atraso presente na malha de controle não seja devidamente levado em consideração durante o projeto do controlador (CALDEIRA et



al., 2011; GOMES DA SILVA JR.; LEITE, 2007; NICULESCU, 2001). Diante disso, nos últimos anos, sistemas com atraso vêm ganhando destaque na literatura especializada. Trabalhos tratando de condições de análise de estabilidade e de síntese de controladores que estabilizam os sistemas com atraso são um exemplo disso, como pode ser visto em (HAO; ZHAO, 2010), (LIU et al., 2010), (LEITE; MIRANDA, 2008) e (RICHARD, 2003). Vale destacar o trabalho (HETEL; DAAFOUZ; IUNG, 2008), em que sistemas não lineares discretos no tempo e com atraso nos estados são representados por sistemas aumentados chaveados, sendo a lei de chaveamento determinada pela dinâmica do atraso. A partir disso, formulações obtidas para sistemas sem atraso podem ser adaptadas para tratar os referidos sistemas aumentados chaveados.

Recentemente, o controle de sistemas fuzzy T-S com atraso tem sido rigorosamente estudado. Diante disso, o problema de análise de estabilidade de modelos fuzzy T-S e síntese de controladores fuzzy T-S sem levar em consideração um critério de desempenho tem sido abordado, como pode ser observado em (GAO; LIU; LAM, 2009), (GASSARA; HAJJAJI; CHAABANE, 2010), (MOZELLI; SOUZA; PALHARES, 2011), (WU et al., 2011a), (WU et al., 2011b) e (WU et al., 2013). O objetivo dos pesquisadores nesse ponto é o desenvolvimento de condições menos conservadoras na obtenção de soluções factíveis.

Há um esforço grande, também, no desenvolvimento de condições que tratam sistemas não lineares com atraso nos estados com perturbação representados por modelos fuzzy T-S. A partir disso, nessas condições, algum critério de desempenho é levado em consideração. A partir do estudo de artigos recentes, verificou-se que o critério utilizado amplamente é o de garantia do custo  $\mathcal{H}_\infty$ , como pode ser visto em (KIM, 2010), (XIA; LI; LI, 2012) e (ZHANG; ZHONG; DANG, 2012). Entretanto, em (CHIU; CHIANG, 2009), (CHEN et al., 2009), (PENG; YUE; TIAN, 2009), (TIAN; YUE; ZHANG, 2009) e (ZHANG; XU, 2009) além do problema da garantia do custo  $\mathcal{H}_\infty$ , leva-se em consideração que os sistemas apresentam incertezas limitadas em norma.

Em todos os artigos abordados nos dois últimos parágrafos foram utilizadas técnicas de tipo Lyapunov-Krasovskii (L-K) para obtenção de condições de análise de estabilidade e síntese de controladores fuzzy T-S, sendo que essas condições são dependentes do atraso, e os atrasos são variantes no tempo. Com isso, observa-se que o foco de estudos da comunidade acadêmica está em desenvolver condições dependentes do atraso. Isso pode ser justificado pelo fato de essas condições serem geralmente menos conservadoras que as condições independentes do atraso. Para citar, em (ZHANG; DANG, 2008) e (ZHANG; LU; ZHENG,

2008) as condições propostas são independentes do atraso, sendo que os sistemas abordados por esses dois artigos são sistemas discretos no tempo fuzzy T-S com atraso constante nos estados.

Uma característica importante do modelo fuzzy T-S é a possibilidade de representar de forma exata o sistema não linear original no interior de uma região do espaço de estados. Uma das formas de obtenção do modelo fuzzy T-S exato é a partir dos valores máximos e mínimos das funções não lineares que compõem o sistema não linear original. Por esse motivo, o modelo fuzzy representa de forma exata o sistema não linear somente no interior da região de validade que está relacionada aos mencionados valores máximos e mínimos das funções não lineares. Isso está apresentado com mais detalhes no Capítulo 2. Um fato importante é que no interior dessa região de validade preserva-se a convexidade do modelo fuzzy T-S. A escolha dessa região pode ser feita levando em consideração limitações físicas presentes no domínio de operação da planta. Nota-se, entretanto, que essa região de validade do modelo T-S, em relação ao sistema não linear a ser controlado, não tem sido levada em consideração na grande maioria dos trabalhos que tratam do controle de sistemas não lineares utilizando a modelagem fuzzy T-S, como pode ser observado em (PARK; LEE; CHOI, 2003), (VIANA; LEITE; MIRANDA, 2010), (WU; LI, 2007), (WU, 2006), (YANG; YANG, 2012), (ZHANG; LU; ZHENG, 2008), (TOGNETTI; OLIVEIRA, 2010), (MOZELLI; SOUZA; PALHARES, 2011), (ANDREA et al., 2008), (CHOI, 2010), (GAS-SARA; HAJJAJI; CHAABANE, 2010), (YANG; YANG, 2012) e (WU et al., 2011a), nas referências desses artigos e nos artigos citados no parágrafo anterior. Portanto, as leis de controle sintetizadas nessas referências se aplicadas em plantas físicas, podem fazer com que estados saturarem. Além disso, existe a possibilidade do controlador operar em condições não convexas, o que representa uma fonte importante de degradação de desempenho, ou mesmo de instabilidade no controle.

O problema de estabilização local é bastante estudado em sistemas com saturação, no qual há esforços em estimar regiões mais próximas possíveis da região de atração de sistemas em malha fechada, como pode ser visto em (HU; LIN, 2001), (TARBOURIECH et al., 2011), (GOMES DA SILVA JR. et al., 2014) e (OLIVEIRA et al., 2013). A região de atração consiste de uma área na qual condições iniciais admissíveis geram trajetórias que convergem assintoticamente para a origem. Portanto, o objetivo do projeto é estimar regiões de condições iniciais admissíveis, nomeadas regiões de estabilidade assintótica, mais próximas possíveis da região de atração.

De acordo com (TARBOURIECH et al., 2011), a caracterização

exata da região de atração não é uma tarefa simples. Além disso, as técnicas utilizadas para a estimação de regiões de estabilidade mostram-se bastante conservadoras. Dessa forma, são necessários esforços para o desenvolvimento de estratégias eficientes de computar boas aproximações para a região de atração, como propõe (LEE; JOO, 2011).

No escopo de sistemas fuzzy T-S já existem trabalhos em que a região de validade, assim como o cálculo da região de estabilidade, são levados em consideração. Exemplo disso pode ser visto em (PITARCH et al., 2010) e (PAN et al., 2012) para sistemas contínuos no tempo, em (KLUG; CASTELAN, 2012), (KLUG et al., 2015) e (ARÍÑO et al., 2014) para sistemas discretos no tempo, sendo todos os casos sem atraso, e em (SILVA et al., 2012) para sistemas discretos no tempo com atraso variante nos estados. Nesse último artigo, o problema de otimização que maximiza a região de estabilidade mostra-se bastante conservador. Uma justificativa para isso é o fato dessa região ser computada via uma hipersfera associada geralmente a uma norma euclidiana. Dessa forma, essa região fica limitada pelo eixo menor do elipsoide formado pelas matrizes da função L-K. Já em (SILVA et al., 2014c) a forma de caracterizar a região de estabilidade proporciona resultados bem menos conservadores do ponto de vista de tamanho dessa região. Essa forma de caracterização da região de estabilidade é um dos resultados apresentados nesta tese.

### 1.3 OBJETIVOS DE PESQUISA

Conforme estabelecido na justificativa, não se leva em consideração informações sobre a região de validade dos modelos fuzzy T-S para o estudo da estabilidade, tem-se então por objetivo geral desta tese demonstrar a importância de se considerar a região de validade em ferramentas de análise de estabilidade e síntese de controladores, aplicadas a sistemas não lineares com atraso nos estados representados por modelos fuzzy T-S. Além disso, desenvolver algoritmos para a síntese de leis de controle para sistemas não lineares com atraso nos estados, representados por modelos fuzzy T-S, sendo levada em consideração a validade local desses modelos fuzzy T-S, assim como a presença de perturbações externas.

Enfatiza-se que no presente trabalho não são investigadas técnicas de discretização de sistemas não lineares contínuos no tempo com atraso variante nos estados. Diante disso, as simulações numéricas desenvolvidas em exemplos foram realizadas diretamente a partir de sistemas

não lineares discretos no tempo com atraso variante nos estados.

Para alcançar êxito no objetivo geral, são apresentados os objetivos específicos:

- analisar o efeito do atraso na estimativa de regiões de estabilidade assintótica do sistema não linear discreto no tempo controlado e desenvolver formas de estimar essas regiões de estabilidade menos conservadoras do que as técnicas já existentes na literatura, de tal forma a aproximá-las do domínio de atração real do sistema não linear controlado;
- desenvolver condições de síntese de controladores fuzzy T-S para estabilizar sistemas não lineares com atraso representados por modelos fuzzy T-S com atraso, levando-se em consideração a região de validade, com a maximização de regiões de estabilidade;
- desenvolver condições de síntese de controladores para sistemas não lineares com atraso nos estados e afetados por perturbações de energia limitada representados por modelos fuzzy T-S com atraso, levando-se em consideração a região de validade, com estimação de regiões positivamente invariantes; e
- desenvolver condições de síntese de controladores fuzzy T-S para estabilizar sistemas não lineares discretos no tempo com atraso variante nos estados representados por modelos fuzzy T-S aumentados e chaveados livres de atraso, levando-se em consideração a região de validade e com a maximização da região de estabilidade. Para a obtenção dessas condições é utilizada a caracterização de sistemas lineares discretos no tempo com atraso variante nos estados por sistemas de estados aumentados discretos no tempo proposta em (HETEL; DAAFOUZ; IUNG, 2008).

## 1.4 METODOLOGIA

A metodologia de pesquisa utilizada baseou-se a princípio em uma revisão bibliográfica sobre sistemas não lineares discretos no tempo com atraso nos estados, modelagem fuzzy T-S, sistemas com saturação dos atuadores, critério de desempenho custo  $\mathcal{H}_\infty$  e conjuntos contrativos. O método utilizado para a obtenção dos modelos fuzzy T-S constitui-se da modelagem generalizada proposta em (TANIGUCHI et al., 2001). Já para o desenvolvimento das condições propostas foram

utilizadas as ferramentas de complemento de Schur, lema da projeção, condição de setor modificado e o procedimento S.

As condições obtidas foram baseadas em funções de Lyapunov-Krasovskii e escritas como desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *linear matrix inequalities*). Os resultados, avaliações e discussões são baseadas em simulações computacionais, que foram realizadas com o uso do *software* (Matlab®) e o *solver* SeDuMi, a partir de modelos que descrevem sistemas reais e acadêmicos. Os resultados são comparados com trabalhos similares presentes na literatura.

## 1.5 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este documento está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2 é feita uma introdução sobre modelos fuzzy T-S. Ainda nesse capítulo, uma breve introdução de modelagem fuzzy T-S para sistemas com atraso é realizada, além de um estudo sobre a importância de se levar em consideração a validade local de um modelo fuzzy T-S. Com isso, conceitos de região de atração e regiões de estabilidade foram incluídos. No Capítulo 3 são desenvolvidas condições de síntese de controladores fuzzy T-S que estabilizam localmente sistemas não lineares a controlar. Essas condições têm relação direta com o artigo (SILVA et al., 2014c) e relação indireta com os trabalhos (SILVA et al., 2012), (SILVA et al., 2014a) e (SILVA et al., 2014d). Além disso, nesse mesmo capítulo são apresentadas condições de síntese de controladores fuzzy T-S para estabilização local  $\ell_2$  de sistemas não lineares discretos no tempo com atraso variante nos estados e afetados por sinais de perturbações limitadas em energia. No Capítulo 4, condições de estabilização em que a lei de controle é a realimentação dos estados atuais e os estados afetados com o atraso máximo são desenvolvidas. Um resultado preliminar dessas condições pode ser visto em (SILVA et al., 2014b), em que o atraso do sistema não linear é fixo, porém incerto. No Capítulo 5, resultados utilizando a caracterização dos modelos fuzzy T-S discretos no tempo com atraso nos estados por modelos fuzzy T-S discretos no tempo de estados aumentados e chaveados são apresentados. E por fim, no Capítulo 6 são apresentadas as conclusões gerais do trabalho de doutorado e as propostas de trabalhos futuros.



## 2 MODELAGEM FUZZY T-S E SISTEMAS NÃO LINEARES COM ATRASO NOS ESTADOS

### 2.1 INTRODUÇÃO

O controle fuzzy T-S baseado em modelo foi proposto em (TAKAGI; SUGENO, 1985). Basicamente, esse modelo é formado por um conjunto de regras fuzzy que descrevem o sistema não linear original em termos de um conjunto de modelos locais lineares que são conectados pelas funções de pertinência fuzzy (FENG, 2009).

A construção de um modelo fuzzy representa um procedimento básico para trabalhar-se na síntese de controladores fuzzy T-S. A implementação desses controladores fuzzy nos sistemas não lineares originais deve proporcionar sistemas de controle resultantes com dinâmicas desejadas, com garantia de estabilidade, minimização do efeito de perturbações em relação aos estados e à(s) saída(s), entre outros requisitos.

Em geral, existem duas abordagens para construção de modelos fuzzy (TANAKA; WANG, 2001):

1. Identificação do sistema utilizando dados de entrada-saída; e
2. Uso de equações não lineares que modelam o sistema de interesse.

Para o primeiro caso, a metodologia utilizada consiste de duas partes: *(i)* identificação da estrutura e *(ii)* identificação dos parâmetros. A identificação de modelos fuzzy é adequada para plantas que não podem ou são muito difíceis de serem representadas por modelos analíticos ou físicos (TANAKA; WANG, 2001), (FENG, 2009). Por outro lado, modelos dinâmicos não lineares podem ser obtidos pelos métodos de modelagem por meio do equacionamento das leis físicas que regem o comportamento do sistema como, por exemplo, pelo método de Lagrange e método de Newton-Euler. O segundo procedimento foi o utilizado nesta pesquisa.

Tomando como base o segundo procedimento de construção de modelos fuzzy T-S, essa construção pode ser definida como exata ou aproximada. O modelo exato necessita da utilização de um número mínimo, finito, de regras para que sistemas dinâmicos não lineares sejam representados exatamente por modelos fuzzy T-S. Nesse caso, os modelos locais são obtidos na região de operação considerada, utilizando-se os valores máximos e mínimos das funções não lineares que constituem o sistema dinâmico. Vale destacar que esses valores máximos e mínimos podem também estar vinculados a limites físicos da planta, o

que permite que limitações práticas sejam levadas em consideração na etapa de projeto de controladores.

Na obtenção de um modelo fuzzy T-S exato, o número de regras obtido e, por consequência, o número de modelos locais lineares é igual a  $2^p$ , sendo  $p$  o número de premissas que compõe o modelo fuzzy T-S, associadas aos termos não lineares do sistema dinâmico. A partir disso, supondo-se um sistema dinâmico composto por uma quantidade elevada de termos não lineares complexos que resulte em um número de premissas relativamente alto, o modelo fuzzy exato obtido será composto de um número elevado de regras. Isso pode dificultar a obtenção de resultados. Uma forma de minimizar essa questão é limitar a região de operação de alguns estados que compõem o sistema original, de tal forma que seja possível linearizar alguns termos não lineares. Assim, é possível obter modelos fuzzy T-S mais simples que representam de forma aproximada o sistema não linear em questão. Um problema dessa abordagem é que as leis de controle obtidas a partir desses modelos fuzzy aproximados não garantem a estabilidade do sistema não linear original em malha fechada caso os estados excursionem fora dos limites especificados para o domínio de operação do sistema em malha aberta na fase de modelagem fuzzy.

Independentemente se utilizar modelos exatos ou aproximados, uma questão relevante com vistas ao projeto de controladores baseados em modelos fuzzy T-S é relativa ao comportamento do sistema em malha fechada composto pela planta não linear realimentada pelo controlador fuzzy. Neste capítulo, após uma revisão sobre a obtenção de um modelo exato para sistemas não lineares discretos no tempo com atraso nos estados, são apresentadas condições de análise de estabilidade e síntese de controladores fuzzy T-S para estabilizar modelos fuzzy T-S com atraso nos estados. Via exemplos numéricos é mostrado que a simples aplicação dos resultados obtidos pelas condições mencionadas nos sistemas não lineares que originaram os modelos fuzzy T-S não produz os resultados esperados. Para contornar essa questão, conceitos de região de validade do modelo fuzzy T-S, região de atração e região de estabilidade assintótica são introduzidos, demonstrando-se que a incorporação desses conceitos às condições de análise de estabilidade e síntese de controladores produz resultados válidos num contexto local e podem, assim, ser aplicados nos sistemas não lineares.



## 2.2 MODELAGEM FUZZY T-S PARA SISTEMAS NÃO LINEARES DISCRETOS NO TEMPO COM ATRASO NOS ESTADOS

A classe de sistemas tratada nesta tese são os sistemas não lineares discretos no tempo com atraso nos estados. Diante disso, nesta seção são apresentados os passos utilizados para a obtenção de modelos fuzzy T-S que representam de forma exata sistemas não lineares discretos no tempo com atraso nos estados.

Para que seja possível o entendimento das próximas discussões apresentadas neste capítulo e nos capítulos subsequentes, se faz necessária a apresentação de algumas notações utilizadas. Para  $d \in \mathbb{N}^*$ , definem-se duas seqüências: a primeira é  $\phi_{d,k} \in E_\phi$ , com  $E_\phi = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_d$ ,  $E_j \subseteq \mathbb{R}^n$ , e o  $j$ -ésimo elemento de  $\phi_{d,k}$  é  $[\phi_{d,k}]_j = x_{k+j-(d+1)} \in E_j$ ,  $j \in \mathcal{I}[1, d]$ ; então,  $\phi_{d,k} = \{x_{k-d}, x_{k-(d-1)}, \dots, x_{k-1}\}$ . A segunda seqüência é  $\varphi_{d,k} \in E_\varphi$ , com  $E_\varphi = E_\phi \times E_{(d+1)}$ ,  $E_{(d+1)} \subseteq \mathbb{R}^n$ , e o  $j$ -th elemento de  $\varphi_{d,k}$  é  $[\varphi_{d,k}]_j = x_{k+j-(d+1)} \in E_j$ ,  $j \in \mathcal{I}[1, d+1]$ ; assim,  $\varphi_{d,k} = \{\phi_{d,k}, x_k\}$ . A norma da seqüência dos vetores,  $\vartheta$  com “ $d$ ” elementos, é definida como  $\|\vartheta\|_d = \sup_{j \in \mathcal{I}[1, d]} \|\vartheta\|_j$ , sendo que em ambos os casos  $\|\cdot\|$  é a norma euclidiana.

Com vistas à discussão que é apresentada na seqüência deste capítulo e ao longo do documento, considere inicialmente o seguinte sistema não linear discreto no tempo com atraso fixo nos estados:

$$x_{k+1} = f(x_k)x_k + f_d(x_k)x_{k-d} + g(x_k)u_k, \quad (2.1)$$

em que  $x_k \in E_x \subset \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados, cuja condição inicial é dada por  $\varphi_{d,k} \in E_\phi$  e  $u_k \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de entrada de controle. As funções  $f(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $f_d(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $g(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  são contínuas e limitadas para todo  $x_k \in E_x$ .

O sistema não linear discreto no tempo com atraso nos estados (2.1) pode ser representado por um modelo fuzzy T-S discreto no tempo com atraso nos estados com  $2^p$  regras e a  $i$ -ésima regra é dada por:

$$\begin{array}{ll} \text{Regra } i : & \text{SE } z_{1,k} \text{ é } M_{i1} \text{ e } \cdots \text{ e } z_{p,k} \text{ é } M_{ip}, \\ & \text{ENTÃO } x_{k+1} = A_i x_k + A_{di} x_{k-d} + B_i u_k, \end{array} \quad (2.2)$$

em que  $z_{j,k}$  é a  $j$ -ésima variável escalar de premissa, que por consideração é dependente apenas dos estados,  $M_{ij}$  é o conjunto fuzzy,  $p$  é o número de variáveis de premissa e as matrizes do sistema  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A_{di} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$  são conhecidas. O atraso constante do sistema é representado por  $d$ .

Assim, um modelo fuzzy T-S discreto no tempo com atraso nos estados pode ser reescrito como:

$$x_{k+1} = A(\alpha_k)x_k + A_d(\alpha_k)x_{k-d} + B(\alpha_k)u_k, \quad (2.3)$$

em que  $z_k = [z_{1,k} \ z_{2,k} \ \cdots \ z_{p,k}]^T$  e  $\alpha_{k(i)} = w_i(z_k) / \sum_{j=1}^N w_j(z_k)$  com  $w_i = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_{j,k})$ . A função de pertinência  $\alpha_k \in \Xi$  é um vetor de parâmetros variantes no tempo, mensurável ou possível de ser estimado em tempo real, e  $\Xi$  é o simplex unitário definido como:

$$\Xi = \left\{ \alpha_k \in \mathbb{R}^N; \sum_{i=1}^N \alpha_{k(i)} = 1, \alpha_{k(i)} \geq 0, i \in \mathcal{I}[1, N] \right\}. \quad (2.4)$$

Portanto, as matrizes em (2.3) podem ser reescritas como:

$$\begin{bmatrix} A(\alpha_k) & A_d(\alpha_k) & B(\alpha_k) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \alpha_{k(i)} \begin{bmatrix} A_i & A_{di} & B_i \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Para obter-se o modelo (2.3)–(2.5), considera-se o sistema não linear discreto no tempo com atraso nos estados (2.1) reescrito da seguinte forma (KLUG; CASTELAN, 2011; FENG, 2009):

$$x_{i,k+1} = \sum_{j=1}^n z_{ij}(x_k)x_{j,k} + \sum_{j=1}^n z_{dij}(x_k)x_{j,k-d} + \sum_{q=1}^p g_{iq}(x_k)u_{q,k},$$

$$i \in \mathcal{I}[1, n], \quad (2.6)$$

com  $z_{ij}(x_k)$ ,  $z_{dij}(x_k)$  e  $g_{iq}(x_k)$  funções de  $x_k$ , sendo  $x_k = [x_{1,k}^T \ \cdots \ x_{n,k}^T]^T$ ,  $n$  o número de estados e  $q$  o número de entradas. Nesse método, somente os termos não lineares do conjunto de equações a diferença são tratados. Para obter a forma generalizada, considere as seguintes variáveis:

$$\begin{aligned} a_{ij1} &= \max_{x_k \in \mathcal{V}_0} z_{ij}(x_k) & a_{ij2} &= \min_{x_k \in \mathcal{V}_0} z_{ij}(x_k) \\ a_{dij1} &= \max_{x_k \in \mathcal{V}_0} z_{dij}(x_k) & a_{dij2} &= \min_{x_k \in \mathcal{V}_0} z_{dij}(x_k) \\ b_{iq1} &= \max_{x_k \in \mathcal{V}_0} g_{iq}(x_k) & b_{iq2} &= \min_{x_k \in \mathcal{V}_0} g_{iq}(x_k), \end{aligned} \quad (2.7)$$

sendo  $\mathcal{V}_0$  a região de operação para o sistema não linear em questão, sendo que essa região determina os limites do vetor de estados  $x_k$ . Nesta tese a região de operação é também chamada de região de validade

do modelo fuzzy T-S e ela é definida formalmente no decorrer deste capítulo. Note que em (2.7) são computados os valores máximos e mínimos de cada função não linear e a partir desses valores máximos e mínimos, pode-se obter as seguintes funções:

$$\mu_{ij1} = \frac{z_{ij}(x_k) - a_{ij2}}{a_{ij1} - a_{ij2}}, \quad \mu_{ij2} = \frac{a_{ij1} - z_{ij}(x_k)}{a_{ij1} - a_{ij2}}, \quad (2.8)$$

$$\mu_{dij1} = \frac{z_{dij}(x_k) - a_{dij2}}{a_{dij1} - a_{dij2}}, \quad \mu_{dij2} = \frac{a_{dij1} - z_{dij}(x_k)}{a_{dij1} - a_{dij2}} \quad (2.9)$$

e

$$\beta_{iq1} = \frac{g_{iq}(x_k) - b_{iq2}}{b_{iq1} - b_{iq2}}, \quad \beta_{iq2} = \frac{b_{iq1} - g_{iq}(x_k)}{b_{iq1} - b_{iq2}}. \quad (2.10)$$

Note que  $\sum_{r=1}^2 \mu_{ijr}(x_k) = \sum_{r=1}^2 \mu_{dijr}(x_k) = \sum_{s=1}^2 \beta_{iqs}(x_k) = 1$ . Portanto, a partir de  $\mu_{ij1}$ ,  $\mu_{dij1}$  e  $\beta_{iq1}$ , as funções  $z_{ij}(x_k)$ ,  $z_{dij}(x_k)$  e  $g_{iq}(x_k)$  podem ser representadas, respectivamente, como:

$$z_{ij}(x_k) = \sum_{r=1}^2 \mu_{ijr}(x_k) a_{ijr}, \quad (2.11)$$

$$z_{dij}(x_k) = \sum_{r=1}^2 \mu_{dijr}(x_k) a_{dijr} \quad (2.12)$$

e

$$g_{iq}(x_k) = \sum_{s=1}^2 \beta_{iqs}(x_k) b_{iqs}. \quad (2.13)$$

Assim, substituindo (2.11), (2.12) e (2.13) em (2.6), tem-se

$$\begin{aligned} x_{i,k+1} = & \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^2 \mu_{ijr}(x_k) a_{ijr} x_{j,k} + \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^2 \mu_{dijr}(x_k) a_{dijr} x_{j,k-d} \\ & + \sum_{q=1}^p \sum_{s=1}^2 \beta_{iqs}(x_k) b_{iqs} u_{q,k}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Agrupando matricialmente (2.14) e fazendo alterações convenientes aos

índices dos somatórios, obtém-se

$$\begin{aligned}
 x_{k+1} = & \sum_{p_{11}=1}^2 \cdots \sum_{p_{nn}=1}^2 \sum_{q_{11}=1}^2 \cdots \sum_{q_{nm}=1}^2 (\mu_{11p_{11}} \cdots \mu_{nnp_{nn}} \mu_{d11p_{11}} \cdots \\
 & \mu_{dnnp_{nn}} \beta_{11q_{11}} \cdots \beta_{nmq_{nm}}) \times \left( \begin{bmatrix} a_{11p_{11}} & \cdots & a_{1np_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1p_{n1}} & \cdots & a_{nnp_{nn}} \end{bmatrix} x_k \right. \\
 & \left. + \begin{bmatrix} a_{d11p_{11}} & \cdots & a_{d1np_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{dnnp_{nn}} & \cdots & a_{dnnp_{nn}} \end{bmatrix} x_{k-d} + \begin{bmatrix} b_{11p_{11}} & \cdots & b_{1np_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1p_{n1}} & \cdots & b_{nnp_{nn}} \end{bmatrix} u_k \right). \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

Agregando os somatórios, chega-se em

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^{2^p} \alpha_{k(i)} \{A_i x_k + A_{di} x_{k-d} + B_i u_k\}, \quad (2.16)$$

em que

$$\alpha_{k(i)} = \mu_{11p_{11}} \cdots \mu_{nnp_{nn}} \mu_{d11p_{11}} \cdots \mu_{dnnp_{nn}} \beta_{11q_{11}} \cdots \beta_{nmq_{nm}}. \quad (2.17)$$

Note que o vetor de função de pertinência,  $\alpha_k$ , depende das funções  $\mu_{ijr}(x_k)$ ,  $\mu_{dijr}(x_k)$  e  $\beta_{iqs}(x_k)$  definidas em (2.8), (2.9) e (2.10), respectivamente, e que as funções não lineares  $z_{ij}(x_k)$ ,  $z_{dij}(x_k)$  e  $g_{iq}(x_k)$  compõem o vetor de variáveis escalares de premissas. Portanto,  $p$  pode representar também o número de não linearidades da planta, sendo importante destacar que não existe necessariamente uma não linearidade para cada posição das matrizes de estados atuais e atrasados, e de entrada do sistema (2.1). Nesses casos, a presença de termos lineares ou termos nulos não implica em um somatório em (2.15), diminuindo a quantidade de sistemas locais para o modelo fuzzy T-S. Além disso, pode-se, se possível e conveniente, considerar variáveis de premissas compostas por mais de uma função não linear o que também diminuiria a quantidade de sistemas locais. Em ambos os casos, a diminuição do número de regras afetaria em uma diminuição da complexidade numérica dos modelos fuzzy em questão. Uma outra alternativa de diminuição da complexidade numérica, ou seja, o número de regras do modelo fuzzy, é trabalhar com sub-modos não lineares, como tratado em (KLUG et al., 2015; DONG; YANG, 2011). A seguir é apresentado

um exemplo em que são mostradas as modelagens fuzzy T-S para três sistemas não lineares discretos no tempo com atraso nos estados, sendo que dois desses são de natureza acadêmica e um com motivação prática. Vale destacar que esses três exemplos são explorados ao longo deste documento de tese para mostrar a eficiência dos resultados desenvolvidos nos capítulos subsequentes e fazer comparações desses com resultados encontrados na literatura.

## 2.2.1 Exemplo – Parte I

### 2.2.1.1 Sistemas acadêmicos

Considere o seguinte sistema não linear discreto no tempo com atraso nos estados:

$$\begin{aligned} x_{1,k+1} &= -3c_1x_{1,k}^2 + 0.25c_1f(x_{2,k}) + 0.1c_2x_{1,k}x_{1,k-d_k} \\ &\quad - 0.2c_2x_{1,k}x_{2,k-d_k} + u_k \\ x_{2,k+1} &= -2c_1x_{1,k} + 0.65c_1f(x_{2,k}) - 0.1c_2x_{1,k}x_{2,k-d_k} \\ &\quad + 0.8u_k, \end{aligned} \quad (2.18)$$

em que  $d_k$  é o atraso que neste momento é constante e igual a 5, e a função  $f(x_{2,k})$  tem a seguinte característica

$$f(x_{2,k}) = \begin{cases} x_{2,k}, & |x_{2,k}| \leq 3, \\ \frac{x_{2,k}^3}{9}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.19)$$

Pode-se reescrever o sistema não linear (2.18) como segue:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} &= c_1 \begin{bmatrix} -3z_{11}(x_{1,k}) & 0.25z_{12}(x_{2,k}) \\ -2 & 0.65z_{22}(x_{2,k}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} \\ &+ c_2 \begin{bmatrix} 0.1z_{d11}(x_{1,k}) & -0.2z_{d12}(x_{1,k}) \\ 0 & -0.1z_{d22}(x_{1,k}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k-d_k} \\ x_{2,k-d_k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \end{bmatrix} u_k, \end{aligned} \quad (2.20)$$

sendo que

$$z_{11}(x_{1,k}) = z_{d11}(x_{1,k}) = z_{d12}(x_{1,k}) = z_{d22}(x_{1,k}) = x_{1,k}$$

e

$$z_{12}(x_{2,k}) = z_{22}(x_{2,k}) = \frac{f(x_{2,k})}{x_{2,k}}.$$

Além disso, determinando que  $x_1 \in \mathcal{I}[-0.8, 0.8]$  e  $x_2 \in \mathcal{I}[-4, 4]$ , têm-se os seguintes conjuntos fuzzy:

$$\mu_{111}(x_{1,k}) = \mu_{d111}(x_{1,k}) = \mu_{d121}(x_{1,k}) = \mu_{d221}(x_{1,k}) = M_{11}(x_{1,k})$$

com

$$M_{11}(x_{1,k}) = M_{31}(x_{1,k}) = (1 + 1.25x_{1,k})/2 \quad (2.21)$$

e

$$\begin{aligned} \mu_{112}(x_{1,k}) &= \mu_{d112}(x_{1,k}) = \mu_{d122}(x_{1,k}) = \mu_{d222}(x_{1,k}) = M_{21}(x_{1,k}) \\ M_{21}(x_{1,k}) &= M_{41}(x_{1,k}) = (1 - 1.25x_{1,k})/2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Além disso, têm-se

$$\mu_{121}(x_{2,k}) = \mu_{221}(x_{2,k}) = M_{12}(x_{2,k})$$

e

$$\mu_{122}(x_{2,k}) = \mu_{222}(x_{2,k}) = M_{32}(x_{2,k}),$$

em que

se  $|x_{2,k}| < 3$ :

$$\begin{aligned} M_{12}(x_{2,k}) &= M_{22}(x_{2,k}) = 0 \\ M_{32}(x_{2,k}) &= M_{42}(x_{2,k}) = 1 \end{aligned} \quad (2.23)$$

senão :

$$\begin{aligned} M_{12}(x_{2,k}) &= M_{22}(x_{2,k}) = (x_{2,k}^2 - 9)/7 \\ M_{32}(x_{2,k}) &= M_{42}(x_{2,k}) = (16 - x_{2,k}^2)/7. \end{aligned}$$

O vetor da função de pertinência pode ser definido como segue:

$$\alpha_k = \begin{bmatrix} M_{11}(x_{1,k})M_{12}(x_{2,k}) & M_{21}(x_{1,k})M_{22}(x_{2,k}) \\ M_{31}(x_{1,k})M_{32}(x_{2,k}) & M_{41}(x_{1,k})M_{42}(x_{2,k}) \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Portanto, um modelo fuzzy T-S (2.2)–(2.5), que representa de forma exata o sistema não linear (2.18), com  $i \in \mathcal{I}[1, 4]$ ,  $p = 1, 2$ ,  $B_i =$

$$[1 \quad 0.8]^T$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= c_1 \begin{bmatrix} -2.4 & 0.4444 \\ -2 & 1.1556 \end{bmatrix}, \quad A_2 = c_1 \begin{bmatrix} 2.4 & 0.4444 \\ -2 & 1.1556 \end{bmatrix}, \\
A_3 &= c_1 \begin{bmatrix} -2.4 & 0.25 \\ -2 & 0.65 \end{bmatrix}, \quad A_4 = c_1 \begin{bmatrix} 2.4 & 0.25 \\ -2 & 0.65 \end{bmatrix}, \\
A_{d1} &= A_{d3} = c_2 \begin{bmatrix} 0.08 & -0.16 \\ 0 & -0.08 \end{bmatrix} \text{ e} \\
A_{d2} &= A_{d4} = c_2 \begin{bmatrix} -0.08 & 0.16 \\ 0 & 0.08 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Na seção B.1 no Apêndice B é apresentada uma descrição auxiliar sobre a obtenção desse modelo fuzzy T-S.

A partir do sistema não linear discreto no tempo com atraso nos estados (2.18) são apresentados dois casos: *i)*  $c_1 = c_2 = 1$ ; e *ii)*  $c_1 = 0.64$  e  $c_2 = 0.8$ . Observe que no segundo caso pesam-se mais as matrizes atrasadas, ou seja, o sistema fica mais dependente do atraso. Note que em ambos os casos  $x_{1,k} \in \mathcal{I}[-0.8, 0.8]$  e  $x_{2,k} \in \mathcal{I}[-4, 4]$ . Essas restrições nos estados representam a região de validade, sendo que nessa região o modelo fuzzy T-S (2.2)–(2.5) com as matrizes definidas como (2.25) e vetor de função de pertinência (2.24) representa de forma exata o sistema não linear (2.18). Isso é abordado com mais detalhes no decorrer deste capítulo.

## 2.2.2 Sistema com motivação prática

Considere as seguintes equações não lineares que representam um sistema de suspensão magnética investigado em (ANDREA et al., 2008) e (MARQUEZ, 2003):

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= \frac{g\mu(\mu x_1(t) + 2\mu y_0 + 2)x_1(t)}{(1 + \mu(x_1(t) + y_0))^2} x_1(t) - \frac{K_m}{m} x_2(t) \\
&\quad + \frac{\lambda\mu}{2m(1 + \mu(x_1(t) + y_0))^2} u(t),
\end{aligned} \tag{2.26}$$

em que  $x_1$  e  $x_2$  são a posição e a velocidade vertical da bola, respectivamente, e  $y_0 = 0.05m$  a posição da bola desejada. Os parâmetros físicos são  $m = 0.068Kg$  a massa da bola suspensa,  $g = 9.8ms^{-2}$  a aceleração da gravidade,  $K_m = 0.001Nsm^{-1}$  o coeficiente de atrito viscoso,  $\lambda = 0.46H$  a indutância e  $\mu = 2m^{-1}$  a variação da indutância.

Motivado por esse sistema, considera-se a seguinte versão discretizada do modelo (2.26):

$$\begin{aligned} x_{1,k+1} &= x_{1,k} + cT x_{2,k} + (1-c)T x_{2,k-d_k} \\ x_{2,k+1} &= \frac{Tg\mu(\mu x_{1,k} + 2\mu y_0 + 2)x_{1,k}}{(1 + \mu(x_{1,k} + y_0))^2} x_{1,k} + c \left(1 - \frac{TK_m}{m}\right) x_{2,k} \\ &\quad + (1-c) \left(1 - \frac{TK_m}{m}\right) x_{2,k-d_k} + \frac{T\lambda\mu}{2m(1 + \mu(x_{1,k} + y_0))^2} u_k, \end{aligned} \quad (2.27)$$

em que o período de amostragem é  $T = 0.01s$ . Note que além da discretização ainda foi incluído um atraso no estado  $x_{2,k}$ . Esse atraso pode ser gerado pela própria dinâmica do sensor de velocidade. Para o exemplo em questão é assumido que  $d_k$  é constante e igual a 5 e o parâmetro  $c = 0.7$  que pondera o efeito do atraso.

Levando-se em consideração que  $x_{1,k} \in \mathcal{I}[-0.05, 0.05]$ , que satisfaz a restrição física da planta em questão, o sistema não linear (2.27) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & cT \\ z_{21}(x_{1,k}) & c \left(1 - \frac{TK_m}{m}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & (1-c)T \\ 0 & (1-c) \left(1 - \frac{TK_m}{m}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k-d_k} \\ x_{2,k-d_k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g_2(x_{1,k}) \end{bmatrix} u_k, \end{aligned} \quad (2.28)$$

em que

$$\begin{aligned} z_{21}(x_{1,k}) &= \frac{Tg\mu(\mu x_{1,k} + 2\mu y_0 + 2)x_{1,k}}{(1 + \mu(x_{1,k} + y_0))^2}, \quad \begin{cases} a_1 = \max(z_1(x_{1,k})) \\ a_2 = \min(z_1(x_{1,k})) \end{cases} \\ g_2(x_{1,k}) &= \frac{T\lambda\mu}{2m(1 + \mu(x_{1,k} + y_0))^2}, \quad \begin{cases} b_1 = \max(z_2(x_{1,k})) \\ b_2 = \min(z_2(x_{1,k})) \end{cases}. \end{aligned}$$

Então, pode-se definir os conjuntos fuzzy da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mu_{211}(z_1(x_{1,k})) &= M_{11}(z_1(x_{1,k})) = M_{31}(z_1(x_{1,k})) = \frac{z_1(x_{1,k}) - a_2}{a_1 - a_2}, \\ \mu_{212}(z_1(x_{1,k})) &= M_{21}(z_1(x_{1,k})) = M_{41}(z_1(x_{1,k})) = \frac{a_1 - z_1(x_{1,k})}{a_1 - a_2}, \\ \beta_{21}(z_2(x_{1,k})) &= M_{12}(z_2(x_{1,k})) = M_{22}(z_2(x_{1,k})) = \frac{z_2(x_{1,k}) - b_2}{b_1 - b_2}, \\ \beta_{22}(z_2(x_{1,k})) &= M_{32}(z_2(x_{1,k})) = M_{42}(z_2(x_{1,k})) = \frac{b_1 - z_2(x_{1,k})}{b_1 - b_2}. \end{aligned}$$



A partir dos conjuntos fuzzy, é possível calcular o vetor de função de pertinência,  $\alpha_k$ , como:

$$\alpha_k = \begin{bmatrix} M_{11}(z_1(x_{1,k}))M_{12}(z_2(x_{1,k})) & M_{21}(z_1(x_{1,k}))M_{22}(z_2(x_{1,k})) \\ M_{31}(z_1(x_{1,k}))M_{32}(z_2(x_{1,k})) & M_{41}(z_1(x_{1,k}))M_{42}(z_2(x_{1,k})) \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Assim, um modelo fuzzy T-S exato é dado a partir de (2.2)–(2.5) com  $i \in \mathcal{I}[1, 4]$ ,  $p = 1, 2$ ,

$$\begin{aligned} A_1 = A_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0.007 \\ 0.0157 & 0.6999 \end{bmatrix}, \quad A_2 = A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0.007 \\ -0.0206 & 0.6999 \end{bmatrix}, \\ A_{di} &= \begin{bmatrix} 0 & 0.003 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0676 \end{bmatrix} \\ &\text{e } B_3 = B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.047 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Note que para garantir a convexidade desse vetor de função de pertinência,  $\alpha_k$ , é necessário que  $|x_{1,k}| \leq 0.05$ . Essa restrição determina a região de validade do modelo fuzzy T-S (2.2)–(2.5), com as matrizes definidas como (2.30) e o vetor de função de pertinência (2.29) representa de forma exata o sistema não linear (2.27). Além disso, para se ter uma representação mais fiel da dinâmica de um levitador magnético via o sistema não linear (2.27), considera-se que se  $|x_{1,k}| = 0.05$ , então  $x_{2,k} = 0$ . Destaca-se que na seção B.2 no Apêndice B é apresentada uma descrição auxiliar sobre a obtenção do modelo fuzzy T-S que representa o sistema não linear (2.27).

Vale destacar que nos próximos exemplos apresentados neste capítulo, optou-se em utilizar somente o sistema acadêmico com o caso  $c_1 = c_2 = 1$ . O motivo para isso é o fato de que a partir desse sistema as análises de interesse são mais representativas do que nos outros casos. Nos próximos capítulos todos os três sistemas são explorados, assim como seus respectivos modelos fuzzy T-S.

## 2.3 ANÁLISE DE ESTABILIDADE E SÍNTESE DE CONTROLADORES

Considere a seguinte lei de controle:

$$u_k = K(\alpha_k)x_k + K_d(\alpha_k)x_{k-d}. \quad (2.31)$$

Note que as matrizes do controlador são dependentes do parâmetro  $\alpha_k$ . Do mesmo modo que as matrizes do sistema (2.3), as matrizes do controlador são definidas como:

$$\begin{bmatrix} K(\alpha_k) & K_d(\alpha_k) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \alpha_{k(i)} \begin{bmatrix} K_i & K_{di} \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

em que  $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $K_{di} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Com isso, tem-se o sistema fuzzy em malha fechada resultante:

$$x_{k+1} = \hat{A}(\alpha_k)x_k + \hat{A}_d(\alpha_k)x_{k-d}, \quad (2.33)$$

sendo que

$$\hat{A}(\alpha_k) = A(\alpha_k) + B(\alpha_k)K(\alpha_k) \text{ e } \hat{A}_d(\alpha_k) = A_d(\alpha_k) + B(\alpha_k)K_d(\alpha_k).$$

A partir de manipulações algébricas, obtêm-se (veja Apêndice C para maiores detalhes):

$$\hat{A}(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^N \sigma_{ij} \alpha_i \alpha_j \frac{A_i + B_i K_j + A_j + B_j K_i}{2}, \quad (2.34)$$

$$\hat{A}_d(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^N \sigma_{ij} \alpha_i \alpha_j \frac{A_{di} + B_i K_{dj} + A_{dj} + B_j K_{di}}{2}, \quad (2.35)$$

em que

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{se } i \neq j, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.36)$$

O estudo e a garantia da estabilidade de sistemas com atraso podem ser feitos por meio da aplicação do Teorema de Lyapunov-Krasovskii (NICULESCU, 2001; FRIDMAN, 2014). Dessa forma, uma candidata à função de Lyapunov-Krasovskii (L-K) é dada por

$$V(\varphi_{d,k}, \alpha_k) = x_k^T P x_k + \sum_{i=d}^1 x_{k-i}^T S x_{k-i}, \quad (2.37)$$

em que as matrizes de Lyapunov  $P = P^T > \mathbf{0}$  e  $S = S^T > \mathbf{0}$  são constantes (veja, por exemplo, (STOJANOVIĆ; DEBELJKOVIĆ; MLADENOVIĆ, 2007) e (LEITE; TARBOURIECH; PERES, 2009)). Cabe salientar que existem funções L-K mais adaptadas para tratar sistemas com parâmetros variantes e, especialmente, para modelos fuzzy T-S como os aqui tra-

tados. Entretanto, para o propósito deste capítulo, usa-se essa função mais simples.

Pela teoria L-K, a estabilidade do sistema descrito por (2.33) para  $K(\alpha_k)$  e  $K_d(\alpha_k)$  dados é suficiente quando:  $V(\varphi_{d,k}, \alpha_k) > 0$ , o que é assegurado quando  $P > 0$  e  $S > 0$ , e  $\Delta V(x_k, \alpha_k) < 0$ . Note que a função (2.37) não é uma função L-K completa (GU; KHARITONOV; CHEN, 2003). Portanto, condições de análise de estabilidade e de síntese de controladores obtidas a partir dessa função são somente suficientes. A seguir é apresentado um lema para avaliar a estabilidade global do sistema (2.33).

**Lema 2.1** *O sistema fuzzy T-S (2.33) com  $K_i$  e  $K_{di}$ , para  $i \in \mathcal{I}[1, N]$ , dados é globalmente assintoticamente estável se existem as matrizes simétricas definidas positivas  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e as matrizes  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , tal que satisfaça a seguinte LMI, para  $i \in \mathcal{I}[1, N]$  e  $j \in \mathcal{I}[i, N]$*

$$\begin{bmatrix} P - F - F^T & 0.5F(A_i + B_iK_j + A_j + B_jK_i) - G^T \\ \star & \begin{pmatrix} S - P + 0.5G(A_i + B_iK_j + A_j + B_jK_i) \\ +0.5(A_i + B_iK_j + A_j + B_jK_i)^T G^T \end{pmatrix} \\ \star & \star \\ 0.5F(A_{di} + B_iK_{dj} + A_{dj} + B_jK_{di}) - H^T & \\ \begin{pmatrix} 0.5G(A_{di} + B_iK_{dj} + A_{dj} + B_jK_{di}) \\ +0.5(A_i + B_iK_j + A_j + B_jK_i)^T H^T \end{pmatrix} & \\ \begin{pmatrix} -S + 0.5H(A_{di} + B_iK_{dj} + A_{dj} + B_jK_{di}) \\ +0.5(A_{di} + B_iK_{dj} + A_{dj} + B_jK_{di})^T H^T \end{pmatrix} & \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (2.38)$$

*Prova:* Desenvolvendo  $\Delta V(\varphi_{d,k}, \alpha_k) < 0$ , tem-se:

$$x_{k+1}^T P x_{k+1} + x_k^T (S - P) x_k - x_{k-d}^T S x_{k-d} < 0. \quad (2.39)$$

Utilizando-se o Lema de Finsler (DE OLIVEIRA; SKELTON, 2001) em (2.39), tem-se

$$x_{k+1}^T P x_{k+1} + x_k^T (S - P) x_k - x_{k-d}^T S x_{k-d} < 0 \longrightarrow \xi_k^T \mathcal{Q} \xi_k < 0, \quad (2.40)$$

sendo que  $\xi_k = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k \\ x_{k-d} \end{bmatrix}$  e  $\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} P & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S - P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -S \end{bmatrix}$ . Com isso:

$$\mathcal{B}(\alpha_k)\xi_k = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & A(\alpha_k) & A_d(\alpha_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k \\ x_{k-d} \end{bmatrix} = 0. \quad (2.41)$$

Pelo Lema de Finsler, sabe-se que (2.40) é verificada se  $\exists \mathcal{F}$ , tal que:

$$\mathcal{Q} + \mathcal{F}\mathcal{B}(\alpha_k) + \mathcal{B}(\alpha_k)^T \mathcal{F}^T < \mathbf{0}, \quad (2.42)$$

sendo  $\mathcal{F} = \begin{bmatrix} F \\ G \\ H \end{bmatrix}$ , em que  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$  são variáveis de folga. Tem-se então que:

$$\begin{bmatrix} P - F - F^T & F\hat{A}(\alpha_k) - G^T \\ \star & S - P + G\hat{A}(\alpha_k) + \hat{A}(\alpha_k)^T G^T \\ \star & \star \\ & F\hat{A}_d(\alpha_k) - H^T \\ & G\hat{A}_d(\alpha_k) + \hat{A}_d(\alpha_k)^T H^T \\ & -S_j + H\hat{A}_d(\alpha_k) + \hat{A}_d(\alpha_k)^T H^T \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (2.43)$$

Considerando a estrutura politópica de (2.34) e (2.35) e a convexidade da função de pertinência,  $\alpha_k \in \Xi$ ,  $\hat{A}(\alpha_k)$  e  $\hat{A}_d(\alpha_k)$  podem ser substituídos por (2.34) e (2.35), respectivamente, e, assim, obter-se (2.38). ■

A condição (2.38) é somente suficiente para a análise de estabilidade, pelo fato de ela ser desenvolvida a partir de uma função L-K que não é completa (GU; KHARITONOV; CHEN, 2003). Vale salientar que resultados de factibilidade obtidos via essa condição são considerados globais na análise de estabilidade do modelo fuzzy T-S (2.33). Isso é um problema para sistemas não lineares na medida que os modelos fuzzy T-S utilizados na LMI de análise representam esses sistemas não lineares de forma exata em uma região do espaço de estados, ou seja, na região de validade. Com isso, para efeito de análise do sistema não linear em malha fechada, o resultado em questão tem que ser local. Isso é abordado no decorrer do texto deste capítulo.

A condição (2.38) é facilmente adaptada para obter condição de

síntese de leis de controle. Diante disso, é proposto o lema a seguir.

**Lema 2.2** *Se existem as matrizes definidas positivas  $\tilde{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\tilde{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e as matrizes  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $Y_{di} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $i \in \mathcal{I}[1, N]$ , tal que a seguinte LMI seja verificada*

$$\begin{bmatrix} \tilde{P} - U - U^T & 0.5(A_i U + B_i Y_j + A_j U + B_j Y_i) & & & \\ \star & \tilde{S} - \tilde{P} & & & \\ \star & & \star & & \\ & 0.5(A_{di} U + B_i Y_{dj} + A_{dj} U + B_j Y_{di}) & & & \\ & \mathbf{0} & & & \\ & -\tilde{S} & & & \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (2.44)$$

então, as matrizes do controlador (2.31)–(2.32) obtidas via

$$K_i = Y_i U^{-1} \text{ e } K_{di} = Y_{di} U^{-1} \quad (2.45)$$

são tais que a origem do sistema em malha fechada (2.33) é globalmente assintoticamente estável.

*Prova:* Considere que em (2.38)  $G = \mathbf{0}$  e  $H = \mathbf{0}$ . Portanto, chega-se ao seguinte resultado:

$$\Theta_j = \begin{bmatrix} P - F - F^T & 0.5F(A_i + B_i K_j + A_j + B_j K_i) & & & \\ \star & S - P & & & \\ \star & & \star & & \\ & 0.5F(A_{di} + B_i K_{dj} + A_{dj} + B_j K_{di}) & & & \\ & \mathbf{0} & & & \\ & -S & & & \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (2.46)$$

Note que a condição (2.46) não é convexa. Para torná-la convexa, basta aplicar a transformação de congruência  $\mathfrak{T}^T \Theta_j \mathfrak{T}$ , sendo  $\mathfrak{T} = \text{diag}\{U, U, U\}$ , com  $U = F^{-T}$ ,  $U^T P U = \tilde{P}$ ,  $U^T S U = \tilde{S}$ ,  $Y_i = K_i U$  e  $Y_{di} = K_{di} U$ , para  $i \in \mathcal{I}[1, N]$ . Com isso, finaliza-se a prova do Lema 2.2. ■

Como para o caso de análise de estabilidade, a síntese apresentada no Lema 2.2 é um problema de factibilidade que sintetiza ganhos para o controlador que estabiliza o sistema em malha fechada (2.33) globalmente. Como já mencionado, considerar a estabilização global torna-se um problema quando aplicado no caso em que se realimenta o sistema não linear com a lei de controle fuzzy (2.31) com ganhos

sintetizados por (2.44)–(2.45). Isso é abordado no exemplo a seguir.

### 2.3.1 Exemplo - Parte II

Como já mencionado no Exemplo 2.2.1, o sistema não linear utilizado neste momento é o (2.18) para o caso  $c_1 = c_2 = 1$ . Assim, considere o projeto dos ganhos do controlador fuzzy T-S (2.31)–(2.32) a partir do Lema 2.2 e que esse controlador seja aplicado ao sistema não linear para obter-se a estabilidade assintótica em malha fechada. Os ganhos projetados a partir da solução do Lema 2.2 são:

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{bmatrix} 2.4063 & -0.38 \end{bmatrix}, & K_{d1} &= \begin{bmatrix} -0.0852 & 0.1639 \end{bmatrix}, \\ K_2 &= -\begin{bmatrix} 2.7339 & 0.3766 \end{bmatrix}, & K_{d2} &= \begin{bmatrix} 0.0857 & -0.1641 \end{bmatrix}, \\ K_3 &= \begin{bmatrix} 2.3991 & -0.2146 \end{bmatrix}, & K_{d3} &= \begin{bmatrix} -0.0855 & 0.1641 \end{bmatrix}, \\ K_4 &= -\begin{bmatrix} 2.7373 & 0.2097 \end{bmatrix}, & K_{d4} &= \begin{bmatrix} 0.0861 & -0.1643 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Além disso, foram obtidas as seguintes matrizes:

$$P = \begin{bmatrix} 33.9498 & -3.7622 \\ -3.7622 & 1.5553 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 8.2976 & -0.6797 \\ -0.6797 & 0.2888 \end{bmatrix} \text{ e} \\ U = \begin{bmatrix} 0.0553 & 0.0986 \\ 0.0581 & 0.7413 \end{bmatrix}.$$

Partindo do fato de que a lei de controle (2.31)–(2.32) com os ganhos (2.47) estabiliza globalmente o modelo fuzzy (2.33), simulações foram realizadas para verificar o que ocorre ao aplicar-se essa lei de controle ao sistema não linear (2.18). Para facilitar a análise, foi considerado que as condições iniciais são compostas somente pelo estado no instante de amostragem  $k = 0$ , ou seja, em  $\varphi_{5,0} = \{\phi_{5,0}, x_0\} \in E_\varphi$  com  $[\phi_{5,0}]_j = [0 \ 0]^T$ ,  $j \in \mathcal{I}[1, 5]$  e  $\bar{x}_0^i = [x_{1,0} \ \bar{x}_{2,0}]^T$ , para  $i \in \mathcal{I}[1, 2500]$ . Com isso, obteve-se a Figura 1. Nessa figura os  $\times$  representam condições iniciais que geram trajetórias instáveis. Portanto, a região em branco é uma estimativa (via simulações) para uma região de atração devido a condições iniciais particulares. Como essa região foi obtida via condições iniciais particulares, ela representa uma parte da região de atração real do sistema não linear em malha fechada. Uma definição formal para a região de atração de um sistema não linear é apresentada na próxima seção.

A partir dos resultados obtidos neste exemplo é possível verificar que, em geral, um controlador projetado utilizando a modelagem fuzzy

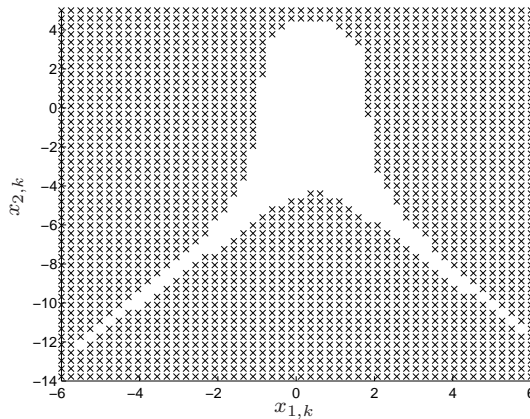


Figura 1 – Região de atração particular para  $[\phi_{5,0}]_j = \mathbf{0}$ , sendo  $j \in \mathcal{I}[1, 5]$ .

não estabiliza globalmente o sistema não linear, diferentemente do que é constantemente pressuposto na literatura. Dessa forma, observa-se a necessidade de tratar a estabilidade dos sistemas fuzzy T-S no contexto local.

## 2.4 VALIDADE LOCAL DA REPRESENTAÇÃO FUZZY T-S E ESTIMAÇÃO DO DOMÍNIO DE ATRAÇÃO

Como já mencionado, o modelo fuzzy T-S é utilizado na representação de um sistema não linear. Em geral, essa representação é válida somente localmente; como mostrado por meio do sistema não linear abordado no Exemplo 2.3.1. As restrições que forçam a representação local de um sistema não linear via um modelo fuzzy T-S podem ser impostas pelo próprio modelo físico da planta ou por escolhas feitas para obter a representação fuzzy, as quais também podem estar baseadas em critérios físicos relacionados à região de operação de interesse para o sistema de controle.

As condições de análise de estabilidade (2.38) e de síntese de controladores fuzzy T-S (2.44) não são válidas para o sistema não linear tendo em vista que o modelo fuzzy T-S o representa de forma exata somente num domínio  $\mathcal{V}_0 \subseteq E_x$  a ser definido a seguir. Portanto, a uti-

lização dessas condições para o estudo de sistemas lineares via modelos fuzzy T-S não é apropriado.

Grande parte dos artigos pesquisados não levam em consideração a região de validade do modelo fuzzy T-S. Porém, esse quadro vem mudando à medida que alguns autores já abordam sistemas fuzzy T-S como modelos locais, como pode ser observado em (KLUG; CASTELAN, 2012) e (KLUG et al., 2015), sendo que nesses artigos os sistemas considerados não apresentam atraso nos estados. Já em (SILVA et al., 2014a) e (SILVA et al., 2014c) são abordados sistemas fuzzy T-S com atraso nos estados.

Considera-se então que, por construção, o modelo (2.3)–(2.5) representa o sistema não linear a ser controlado somente no domínio de validade  $\mathcal{V}_0$ , o qual é definido por um conjunto poliédrico

$$\mathcal{V}_0 = \{x_k \in \mathbb{R}^n; |Lx_k| \leq \eta\} \subseteq E_x, \quad (2.48)$$

em que  $L \in \mathbb{R}^{\kappa \times n}$  e  $\eta \in \mathbb{R}^\kappa$  com  $\kappa$  representando o número de estados que são limitados pela região de validade. Diante disso, considera-se que as trajetórias dos estados do sistema em malha fechada devem permanecer confinadas no interior de um conjunto de tipo Lyapunov dado por:

$$\mathcal{E}(P) = \{x_k \in \mathbb{R}^n; x_k^T P x_k \leq 1\} \quad (2.49)$$

e contida na região de validade, ou seja,  $\mathcal{E}(P) \subseteq \mathcal{V}_0$ . Como  $x_k \in \mathcal{V}_0 \Rightarrow \alpha_k \in \Xi$ , as condições dos Lemas 2.1 e 2.2, as quais são baseadas na convexidade de  $\alpha_k$ , garantem estabilidade assintótica local para toda trajetória que inicia em  $\mathcal{E}(P) \subseteq \mathcal{V}_0$ . A região de validade, dada em (2.48), pode ser equivalentemente descrita por um conjunto de  $r$  restrições quadráticas, como segue:

$$x_k^T L_{(r)}^T \eta_{(r)}^{-2} L_{(r)} x_k \leq 1. \quad (2.50)$$

Pode-se garantir a inclusão  $\mathcal{E}(P) \subseteq \mathcal{V}_0$  a partir de  $r$  restrições como segue:

$$P - L_{(r)}^T \eta_{(r)}^{-2} L_{(r)} \geq 0. \quad (2.51)$$

Utilizando o complemento de Schur, (2.51) equivale a:

$$\begin{bmatrix} P & L_{(r)}^T \\ \star & \eta_{(r)}^2 \end{bmatrix} \geq 0. \quad (2.52)$$

Portanto, ao incluírem-se as  $r$  condições sob a forma (2.52) junto com



as condições (2.38) e (2.44), tem-se resultados válidos localmente para análise de estabilidade e para síntese de controladores, respectivamente. Sendo assim, esses se tornam resultados apropriados para o estudo de sistemas não lineares representados por modelos fuzzy T-S.

### 2.4.1 Região de atração e região assintoticamente estável

Quando trabalha-se com estabilidade local e sistemas não lineares, um conceito inerente é o da região de atração. Adequando a definição dessa região apresentada em (TARBOURIECH et al., 2011) para o caso com atraso, tem-se:

**Definição 2.1** *A região de atração  $R_A$  é definida como o conjunto de todas as sequências de  $\varphi_{d,0}$ , tais que as trajetórias  $x_k$  correspondentes convergem assintoticamente para a origem. Em outras palavras, se  $[\varphi_{d,0}]_j \in R_A$ ,  $j \in \mathcal{I}[1, d+1]$ , então  $x_k \rightarrow \mathbf{0}$  com  $k \rightarrow \infty$ .*

A caracterização exata da região de atração para um sistema com atraso é uma tarefa praticamente impossível de ser executada, pois é possível ter infinitas sequências do vetor de condições iniciais  $\varphi_{d,0}$ . Portanto, pode-se caracterizar um subconjunto da região de atração com representação analítica bem definida. Esse subconjunto é chamado de região de estabilidade assintótica, ou simplesmente região de estabilidade. De acordo com (TARBOURIECH et al., 2011), considera-se a seguinte definição para a região de estabilidade.

**Definição 2.2** *Uma região  $R_S$  é dita ser uma região assintoticamente estável se  $R_S \subseteq R_A$ ,  $0 \in R_S$  e  $[\varphi_{d,0}]_j \in R_S$ ,  $j \in \mathcal{I}[1, d+1]$ .*

São propostas duas maneiras de caracterizar a região de estabilidade neste capítulo. A primeira é a forma comumente utilizada na literatura especializada de sistemas lineares com atraso nos estados e saturação do sinal de controle, veja (DEY et al., 2012), (WANG; GU; LI, 2013) e (DE SOUZA; COUTINHO, 2012). Esse primeiro método de caracterização está formalmente apresentado na definição a seguir (GHIGGI et al., 2008) e (BENDER; GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH, 2010).

**Definição 2.3** *Um conjunto que define a região de estabilidade assintótica para um sistema não linear com atraso no estado é caracterizado como se segue:*

$$\mathcal{C}_\varphi = \{\varphi_{d,0} \in E_\varphi; \|\varphi_{d,0}\|_d^2 \leq r_\varphi\}, \quad (2.53)$$

em que  $r_\varphi \in \mathbb{R}^*$  e o valor de  $r_\varphi$  é calculado da seguinte forma:

$$r_\varphi = \frac{1}{\lambda_{\max}(P) + d\lambda_{\max}(S)}. \quad (2.54)$$

Observe que  $\mathcal{C}_\varphi \subseteq \mathcal{E}(P) \subseteq \mathcal{V}_0$ . A expressão (2.54) é obtida a partir da função L-K (2.37). Para maiores informações das manipulações algébricas utilizadas para obter  $r_\varphi$  veja (SILVA et al., 2012).

Já a maneira alternativa de caracterizar a região de estabilidade resulta da decomposição da sequência de condições iniciais e, com isso, trata-se separadamente  $x_0$  e  $\phi_{\bar{d},0}$ . Essa segunda opção representa a base para a principal contribuição desta tese e ela está formalmente apresentada na definição a seguir.

**Definição 2.4** A região de estabilidade  $\Upsilon_\varphi \subseteq E_\varphi$  é composta pelas sequências  $\varphi_{d,0}$  tais que

$$\begin{aligned} \Upsilon_\varphi = \{ \varphi_{d,0} \in E_\varphi; \forall j \in \mathcal{I}[1, d+1], [\varphi_{d,0}]_j \in \mathcal{C}_x, j = d+1, \\ e [\varphi_{d,0}]_j \in \mathcal{B}_\phi, j \in \mathcal{I}[1, d] \}, \end{aligned} \quad (2.55)$$

em que

$$\mathcal{C}_x = \{x_0 \in E_{d+1}; x_0^T P x_0 \leq 1 - \rho \|\phi_{d,0}\|_d^2\} \subseteq \mathcal{V}_0 \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\phi = \{[\phi_{d,0}]_j \in E_j, j \in \mathcal{I}[1, d]; \|\phi_{d,0}\|_d \leq r \text{ e } [\phi_{d,0}]_j \in \mathcal{V}_0, \\ j \in \mathcal{I}[1, d]\}, \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\rho = d\lambda_{\max}(S) \quad (2.58)$$

e  $r$  é um parâmetro de escolha que deve satisfazer  $0 \leq r \leq \rho^{-\frac{1}{2}}$ .

Note que na metodologia de caracterização da região de estabilidade apresentada na Definição 2.3, o cálculo de  $\rho$  depende da candidata à função L-K utilizada na obtenção das condições de análise ou síntese de controladores. Vale destacar também que o conjunto  $\mathcal{C}_x$  trata o vetor de condições iniciais em  $k = 0$ , ou seja,  $x_0$ . Já o conjunto  $\mathcal{B}_\phi$  lida com a sequência das condições iniciais atrasadas, ou seja,  $[\phi_{d,0}]_j, j \in \mathcal{I}[1, d]$ . Ademais, caso essa sequência de condições iniciais atrasadas seja nula, isso resulta em  $\mathcal{C}_x = \mathcal{E}(P)$ , sendo esse o próprio conjunto contrativo e a mesma solução encontrada para sistemas sem atraso.

O objetivo neste capítulo é fazer uma breve apresentação da metodologia de caracterização da região de estabilidade proposta nesta

tese. Sendo assim, nos capítulos subsequentes, esse assunto é abordado com mais detalhes e de forma mais técnica.

### 2.4.2 Problema de otimização

Um dos interesses deste capítulo é apresentar a relevância da região de validade do modelo fuzzy T-S quando esse representa de forma exata um sistema não linear. Diante disso, os resultados obtidos a partir da análise de estabilidade ou da síntese de controladores efetuados diretamente no modelo fuzzy T-S podem ser utilizados nos sistemas não lineares, sendo os limites da região de validade respeitados. Portanto, claramente trabalha-se com condições de estabilidade e síntese de controladores locais e não mais globais e isso resulta na necessidade de estimar regiões de estabilidade.

A partir do que foi dito acima, é suficiente neste momento trabalhar com a condição de análise de estabilidade, contando que os ganhos do controlador que estabilizam o sistema sejam dados. Nos próximos capítulos a questão da síntese é abordada. Sendo assim, nota-se que o interesse é calcular a máxima região possível  $\mathcal{C}_\varphi \subseteq \mathcal{E}(P) \subseteq \mathcal{V}_0$  para a abordagem clássica e  $\Upsilon_\varphi \subseteq \mathcal{E}(P) \subseteq \mathcal{V}_0$  na abordagem proposta neste trabalho. Assim, para aumentar ambas as regiões,  $\mathcal{C}_\varphi$  e  $\Upsilon_\varphi$ , é suficiente minimizar  $\lambda_{\max}(P)$  e minimizar  $\lambda_{\max}(S)$ . Sendo assim, define-se uma matriz simétrica definida positiva  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , tal que  $W \geq P$ , ou seja,

$$\begin{bmatrix} W & P \\ \star & P \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}. \quad (2.59)$$

Além disso, tem-se que  $W \geq S$ , resultando em

$$\begin{bmatrix} W & S \\ \star & S \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}. \quad (2.60)$$

Portanto, para minimizar  $\lambda_{\max}(P)$  e  $\lambda_{\max}(S)$  indiretamente, basta minimizar o traço da matriz  $W$ . Diante disso, propõe-se o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \min && \text{traço}(W) \\ & \text{sujeito a} && (2.38), (2.52), (2.59) \text{ e } (2.60). \end{aligned} \quad (2.61)$$

### 2.4.3 Exemplo – Parte III

Continuando o Exemplo 2.3.1. O interesse neste momento é estimar a região de estabilidade do sistema não linear realimentado via lei de controle (2.31)–(2.32) com os ganhos calculados no exemplo anterior, (2.47). Para isso, resolve-se o problema de otimização (2.61). A região de validade do sistema, que é representada pelo conjunto  $\mathcal{V}_0$  em (2.48), é definida como:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \eta = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Com isso, obtém-se as seguintes matrizes:

$$P = \begin{bmatrix} 1.7874 & -0.1268 \\ -0.1268 & 0.0715 \end{bmatrix} \text{ e } S = \begin{bmatrix} 0.1414 & 0.0178 \\ 0.0178 & 0.0084 \end{bmatrix}.$$

Neste exemplo são estimadas duas regiões de estabilidade: a convencional, Definição 2.3, e a proposta neste trabalho, Definição 2.4. A partir das matrizes obtidas, para a região de estabilidade  $\mathcal{C}_\varphi$ , tem-se  $\lambda_{\max}(P) = 1.7967$  e  $\lambda_{\max}(S) = 0.1438$ , o que resulta em um raio igual a 0.6305. Já para a região de estabilidade  $\Upsilon_\varphi$ , tem-se  $\mathcal{B}_\phi = \{0\}$ , pois é suposto que os elementos das condições iniciais atrasadas sejam nulos, ou seja,  $[\phi_{d,0}]_j = \mathbf{0}$ ,  $j \in \mathcal{I}[1, 5]$ , o que implica em  $r = 0$  e, consequentemente,  $\|\phi_{d,0}\|_5^2 = 0$ . Portanto, tem-se  $\Upsilon_\varphi = \mathcal{C}_x = \mathcal{E}(P)$ .

Na Figura 2 são apresentadas: parte da região de atração particular,  $R_{AP}$ , obtida no exemplo 2.3.1, as duas regiões de estabilidade estimadas  $\mathcal{C}_\varphi$  e  $\mathcal{C}_x$  e a região de validade do modelo  $\mathcal{V}_0$ . Destaca-se que a região  $\mathcal{C}_\varphi$  apresentada é na verdade a projeção de  $\mathcal{C}_\varphi$  no espaço  $E_{d+1}$ . A partir das regiões obtidas neste exemplo, observa-se que a região de estabilidade  $\Upsilon_\varphi$  apresenta resultados muito melhores do ponto de vista de tamanho de região quando comparada com a região de estabilidade  $\mathcal{C}_\varphi$ . Um dos motivos para isso é o fato da decomposição da sequência de condições iniciais o que resulta no tratamento separado de  $x_0$  e  $\phi_{\tilde{d},0}$ .

Para verificar a melhora que se tem ao utilizar o método de caracterização da região de estabilidade proposta nesta tese, considere que  $r = r_\varphi$ , ou seja,  $\|\phi_{d,0}\|_d^2 = 0.6305$  em  $\mathcal{B}_\phi$ . A partir disso, calcula-se o conjunto  $\mathcal{C}_x$  que juntamente com o conjunto  $\mathcal{B}_\phi$  formam a região de estabilidade  $\Upsilon_\varphi$ . Assim, na Figura 3 são apresentadas essa região  $\mathcal{C}_x$  e as regiões  $\mathcal{C}_\varphi$ ,  $\mathcal{E}(P)$  e  $\mathcal{V}_0$ . A partir da análise dessa figura, observa-se que utilizando o método de estimação da região de estabilidade proposto nesta tese, obtém-se o conjunto  $\mathcal{C}_x$ , que trata das condições iniciais na

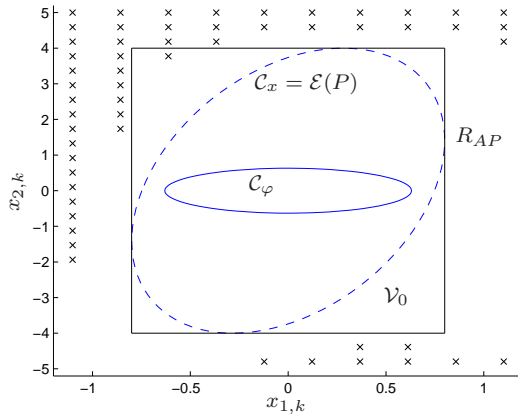


Figura 2 – Região de atração particular, região  $\mathcal{E}(P)$ , regiões de estabilidade e região de validade.

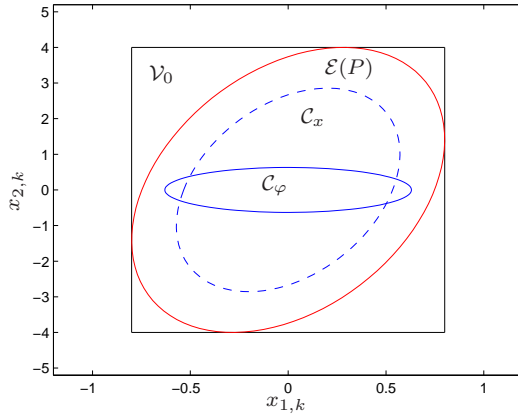


Figura 3 – Região  $\mathcal{E}(P)$ , regiões de estabilidade e região de validade.

amostra zero, ou seja,  $k = 0$ , com área maior que a da projeção do conjunto  $\mathcal{C}_\varphi$  obtido a partir do método tradicional. Note que na região de estabilidade estimada via metodologia proposta, as condições iniciais atrasadas são tratadas pelo conjunto  $\mathcal{B}_\phi$ , que foi projetado para ter  $r = r_\varphi$ . Sendo assim, em ambas as regiões de estabilidade estimadas,  $\Upsilon_\varphi$

e  $\mathcal{C}_\varphi$ , os vetores das condições iniciais atrasadas apresentam a mesma norma. Toda essa análise reforça que a decomposição da sequência de condições iniciais ao estimar a região de estabilidade produz resultados bastante interessantes.

## 2.5 CONCLUSÕES

Neste capítulo foram introduzidos modelos fuzzy T-S e a metodologia utilizada neste trabalho para obtenção de modelos fuzzy T-S que representam de forma exata sistemas não lineares discretos no tempo com atraso nos estados. Além disso, condições de análise de estabilidade e síntese de controladores independentes do atraso para sistemas com atraso fixo foram apresentadas para a solução de problemas de factibilidade. Essas condições foram desenvolvidas a partir de uma função de Lyapunov-Krasovskii não completa, o que resulta em condições somente suficientes, e elas são formuladas via LMIs.

Por meio de exemplos foi possível observar que as condições formuladas para a resolução do problema de factibilidade para o caso global não são apropriadas para tratar modelos fuzzy T-S obtidos a partir de sistemas não lineares discretos no tempo com atraso nos estados. Nesse caso foi necessário incluir a informação da região de validade, em que esses modelos representam de forma exata os sistemas não lineares. Por conta disso, foi visto que há a necessidade de estimar uma região de estabilidade. Foram apresentadas duas formas de caracterizar a região de estabilidade: uma bastante utilizada em resultados de sistemas lineares discretos no tempo com atraso nos estados e saturação do sinal de controle e a outra proposta neste trabalho, em que é feita uma decomposição da sequência de condições iniciais o que resulta no tratamento separado de  $x_0$  e  $\phi_{\bar{d},0}$ . A partir de um exemplo foi possível observar que a forma proposta nesta tese de cálculo da região de estabilidade apresenta resultados mais interessantes, além de fornecer regiões de tamanhos maiores.

### 3 ESTABILIZAÇÃO LOCAL POR REALIMENTAÇÃO DOS ESTADOS ATUAL E ATRASADO

Dois problemas são tratados neste capítulo, que são: *i)* estabilização local de sistemas não lineares discretos no tempo e com atraso nos estados; e *ii)* estabilização local  $\ell_2$  de sistemas não lineares discretos no tempo e com atraso nos estados afetados por perturbações  $\ell_2$ , sendo que em ambos os casos os sistemas não lineares são representados de forma exata por modelos fuzzy T-S. Diante disso, são apresentados dois conjuntos de condições convexas em termos de desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *linear matrix inequalities*) para a síntese de controladores fuzzy via realimentação de estados atuais e atrasados. As condições de estabilização local e estabilização local  $\ell_2$  propostas são baseadas em uma mesma candidata à função fuzzy de Lyapunov-Krasovskii, sendo essa função mais completa que a utilizada no capítulo anterior e levam em consideração o domínio de validade do modelo fuzzy T-S.

Tendo em vista a discussão apresentada no Capítulo 2 e considerando que o sistema não esteja sendo afetado por nenhum sinal de perturbação, a estimação de regiões de estabilidade é essencial para a determinação de conjuntos de condições iniciais seguras que produzam trajetórias assintoticamente estáveis para os sistemas não lineares discretos no tempo com atraso nos estados em malha fechada com os controladores fuzzy projetados. A estimação de regiões de estabilidade proposta neste capítulo segue a mesma metodologia apresentada na Definição 2.4, ou seja, a caracterização da região de estabilidade resulta da decomposição da sequência de condições iniciais e, com isso, tratam-se separadamente  $x_0$  e  $\phi_{\bar{d},0}$ . Com o objetivo de maximizar essas regiões de estabilidade estimadas, propõe-se um problema de otimização convexa que calcule o controlador fuzzy que fornece essa maximização.

Para os resultados apresentados neste capítulo referentes à estabilização local  $\ell_2$ , considera-se que as condições iniciais do sistema não linear são nulas. Portanto, duas questões fundamentais são analisadas: os efeitos de sinais de perturbações no sistema não linear e o modelo fuzzy T-S que representa de forma exata o sistema não linear na região de validade. Em consequência disso, os resultados aqui apresentados asseguram que o sistema não linear em malha fechada é entrada-estado estável (ISS, do inglês *input-to-state stable*) no sentido  $\ell_2$ , pois as trajetórias resultantes evoluem somente no interior da região positivamente invariante (TARBOURIECH et al., 2011). Portanto,

garante-se que essas trajetórias nunca irão excursionar fora da região de validade do modelo fuzzy T-S. Três problemas de otimização convexas são formulados para projetar ganhos fuzzy: *a)* um problema que maximiza a energia do sinal de perturbação permitido no sistema não linear em malha fechada; e *b)* dois problemas que minimizam o efeito do sinal de perturbação aplicado no sistema não linear em malha fechada para o valor de energia do sinal de perturbação dado. Por fim, são apresentados exemplos que ilustram os resultados aqui propostos. Vale destacar que os seguintes trabalhos estão relacionadas ao conteúdo deste capítulo: (SILVA et al., 2014c), (SILVA et al., 2014a), (SILVA et al., 2014d) e (SILVA et al., 2012) à estabilização local e o artigo aceito para ser publicado no ACC à estabilização local  $\ell_2$ .

### 3.1 FORMULAÇÃO DOS PROBLEMAS

Considere o seguinte sistema não linear discreto no tempo com atraso variante nos estados:

$$x_{k+1} = f(x_k)x_k + f_d(x_k)x_{k-d_k} + g(x_k)u_k + h(x_k)\omega_k, \quad (3.1)$$

em que  $x_k \in E_x \subseteq \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $d_k$  é o atraso variante no tempo com  $d_k \in \mathcal{I}[1, \bar{d}]$ ,  $\bar{d} \in \mathbb{N}^*$  e  $\bar{d} < \infty$ ,  $u_k \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de entrada de controle e  $\omega_k \in E_\omega \subseteq \mathbb{R}^r$  é o vetor de perturbação. As funções  $f(\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $f_d(\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $g(\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $h(\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{n \times r}$  são contínuas e limitadas para todo  $x_k \in E_x$ . As condições iniciais associadas à (2.6) são dadas pela sequência  $\varphi_{\bar{d},0} \in E_\varphi$ . Além disso, o conjunto  $E_\omega$  associado às perturbações é composto por elementos pertencentes ao espaço  $\ell_2$ , ou seja, o vetor  $\omega_k$  verifica  $\sum_{k=0}^{\infty} \omega_k^T \omega_k \leq \delta^{-1}$ , em que  $\delta \in \mathbb{R}^+$ . Para a classe de sistemas tratada neste capítulo, considera-se que  $x_k$  e  $d_k$  estão sempre disponíveis.

O sistema não linear (3.1) pode ser localmente representado de forma exata pelo seguinte modelo fuzzy T-S com  $N = 2^p$  regras:

$$\begin{array}{ll} \text{Regra } i : & \text{SE} \quad z_{1,k} \text{ é } M_{i1} \text{ e } \cdots \text{ e } z_{p,k} \text{ é } M_{ip}, \\ & \text{ENTÃO} \quad x_{k+1} = A_i x_k + A_{di} x_{k-d_k} + B_i u_k + B_{\omega i} \omega_k, \end{array} \quad (3.2)$$

em que  $z_{j,k} \in \mathbb{R}$ , sendo  $j \in \mathcal{I}[1, p]$ , são as variáveis escalares de premissa dependentes somente dos estados  $x_k$ ,  $M_{ij}$  são os conjuntos fuzzy e  $p$  é o número de variáveis de premissa. As matrizes dos modelos fuzzy locais



$A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A_{di} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $B_{\omega i} \in \mathbb{R}^{n \times r}$  são conhecidas.

Por meio do processo de defuzzificação (TANAKA; WANG, 2001), pode-se expressar o modelo fuzzy (3.2) pelo seguinte modelo fuzzy dinâmico:

$$x_{k+1} = A(\alpha_k)x_k + A_d(\alpha_k)x_{k-d_k} + B(\alpha_k)u_k + B_\omega(\alpha_k)\omega_k, \quad (3.3)$$

em que  $\alpha_{k(i)} = w_i(z_k) / \sum_{j=1}^N w_j(z_k)$  com  $w_i = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_{j,k})$  e  $z_k = [z_{1,k} \ z_{2,k} \ \dots \ z_{p,k}]^T$ . Portanto, as matrizes em (3.3) podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A(\alpha_k) & A_d(\alpha_k) & B(\alpha_k) & B_\omega(\alpha_k) \end{bmatrix} &= \sum_{i=1}^N \alpha_{k(i)} \\ &\times \begin{bmatrix} A_i & A_{di} & B_i & B_{\omega i} \end{bmatrix}, \quad \alpha_k \in \Xi, \end{aligned} \quad (3.4)$$

sendo

$$\Xi = \left\{ \alpha_k \in \mathbb{R}^N; \sum_{i=1}^N \alpha_{k(i)} = 1, \alpha_{k(i)} \geq 0, i \in \mathcal{I}[1, N] \right\}. \quad (3.5)$$

O vetor de parâmetros variantes no tempo,  $\alpha_k$ , é a própria função de pertinência do modelo fuzzy T-S, que é suposta ser computada em tempo real – como usual na literatura (veja, por exemplo (FENG, 2009, 2006; TANAKA; WANG, 2001)) – e verifica o simplex unitário  $\Xi$  sempre que  $x_k$  pertencer à região de validade  $\mathcal{V}_0 \subseteq E_x$ . Como no Capítulo 2, neste capítulo, a região de validade é definida como um conjunto poliédrico:

$$\mathcal{V}_0 = \{x_k \in \mathbb{R}^n; |L_{(r)}x_k| \leq \eta_{(r)}\} \subseteq E_x, \quad (3.6)$$

em que  $\eta_{(r)} > 0$  e  $L_{(r)} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ , para  $r \in \mathcal{I}[1, \kappa]$ , com  $\kappa$  representando o número de restrições que caracteriza a região permitida no espaço de estados para o sistema em malha fechada. Note que  $\mathcal{V}_0$  está primeiramente relacionado aos valores min – max da técnica de modelagem fuzzy T-S descrita em (TANIGUCHI et al., 2001), mas esse conjunto pode também refletir imposições vinculadas à segurança ou à estrutura física da planta modelada. Assim, por construção, tem-se que  $x_k \in \mathcal{V}_0$  resulta em  $\alpha_k \in \Xi$ .

Utilizando a compensação paralela distribuída, a lei de controle fuzzy proposta é dada por:

$$u_k = K(\alpha_k)x_k + K_d(\alpha_k)x_{k-d_k}. \quad (3.7)$$

Como no caso das matrizes do modelo fuzzy (3.3), as matrizes do controlador fuzzy são definidas como se segue:

$$[K(\alpha_k) \quad K_d(\alpha_k)] = \sum_{i=1}^N \alpha_{k(i)} [K_i \quad K_{di}], \quad \alpha_k \in \Xi, \quad (3.8)$$

sendo  $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $K_{di} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Caso o valor de  $d_k$  não esteja disponível, é suficiente assumir que  $K_d(\alpha_k) = \mathbf{0}$  em (3.7)–(3.8), levando a lei de controle para  $u_k = K(\alpha_k)x_k$ .

Utilizando a formulação fuzzy (3.3)–(3.8), tem-se o seguinte modelo fuzzy T-S em malha fechada:

$$x_{k+1} = \hat{A}(\alpha_k)x_k + \hat{A}_d(\alpha_k)x_{k-d_k} + B_\omega(\alpha_k)\omega_k, \quad (3.9)$$

em que, por construção,

$$\hat{A}(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^N \mu_{ij} \alpha_{k(i)} \alpha_{k(j)} \frac{(A_i + B_i K_j + A_j + B_j K_i)}{2}, \quad (3.10)$$

$$\hat{A}_d(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^N \mu_{ij} \alpha_{k(i)} \alpha_{k(j)} \frac{A_{di} + B_i K_{dj} + A_{dj} + B_j K_{di}}{2}, \quad (3.11)$$

com

$$\mu_{ij} = 2 \text{ se } i \neq j, \text{ ou } \mu_{ij} = 1 \text{ se } i = j. \quad (3.12)$$

Observe que o sistema fuzzy em malha fechada a partir da lei de controle (3.7)–(3.8) e, assim, (3.9) deve ter suas trajetórias sempre confinadas em  $\mathcal{V}_0$ , assegurando  $\alpha_k \in \Xi$  e a validade (convexidade) do modelo fuzzy T-S (3.2)–(3.6). Isso é uma questão fundamental, uma vez que deseja-se explorar a convexidade para garantir a estabilidade do sistema não linear (3.1) em malha fechada por meio da lei de controle (3.7)–(3.8) conduzido por algum  $\omega_k \in E_\omega$ . Para esse fim, e seguindo (SONTAG; WANG, 1995), define-se a estabilidade entrada-estado local (local-ISS) como:

**Definição 3.1** *O sistema não linear (3.1) em malha fechada com a lei de controle (3.7)–(3.8) e conduzido por alguma perturbação  $\omega_k \in E_\omega$  é localmente-ISS (no sentido  $\ell_2$ ) se suas trajetórias permanecem limitadas em  $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathbb{R}^n$  e quando  $\omega_k = 0$  as trajetórias dos estados tendem para o equilíbrio (origem).*

Para maiores detalhes sobre a Definição 3.1, veja (SONTAG; WANG, 1995; KELLETT, 2014; GRÜNE; KELLETT, 2014).

Neste capítulo são tratados dois problemas: *i)* estabilização local; e *ii)* estabilização local  $\ell_2$ . Para o primeiro caso é considerado que  $\omega_k = 0$  e que elementos das condições iniciais  $\varphi_{\bar{d},0}$  sejam diferentes de zero. Portanto, um problema fundamental é a necessidade de estimar regiões de estabilidade, representadas por  $\Upsilon_\varphi \subseteq E_\varphi$ , em que  $[\varphi_{\bar{d},0}]_j \in \Upsilon_\varphi \subseteq \mathcal{V}_0$ , para  $j \in \mathcal{I}[1, \bar{d}]$ . Diante disso, é proposto o seguinte problema de estabilização local:

**Problema 3.1 (Estabilização local)** *Determinar os ganhos  $K_i$  e  $K_{di}$  para o controlador (3.7)–(3.8) com  $\omega_k = 0$ , e caracterizar a região de estabilidade  $\Upsilon_\varphi$ , de tal forma que essa região represente o conjunto de condições iniciais seguras e, assim, as trajetórias correspondentes do sistema em malha fechada permaneçam confinadas em  $\mathcal{V}_0$  e convirjam assintoticamente para a origem.*

Já para o caso de estabilização local no sentido  $\ell_2$ , consideram-se que  $\omega_k \neq 0$  e que as condições iniciais sejam nulas. Para isso, tem-se o seguinte problema:

**Problema 3.2 (Estabilização local  $\ell_2$ )** *Determinar os ganhos  $K_i$  e  $K_{di}$ ,  $i \in \mathcal{I}[1, N]$ , tal que o controlador (3.7)–(3.8) aplicado ao sistema não linear (3.1) resulte em um sistema não linear em malha fechada localmente-ISS no sentido  $\ell_2$  para todo  $\omega_k \in E_\omega$ .*

### 3.2 RESULTADOS PRELIMINARES

Nesta seção são apresentados resultados preliminares. A compreensão desses resultados é necessária para que os resultados principais (apresentados na próxima seção) sejam entendidos de forma clara.

Considere a candidata à função fuzzy de Lyapunov-Krasovskii (L-K),  $V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k) : E_\varphi \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}^+$ :

$$\begin{aligned} V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k) = & x_k^T Q^{-1}(\alpha_k) x_k + \sum_{i=k-\bar{d}_k}^{k-1} x_i^T R^{-1}(\alpha_i) x_i \\ & + \sum_{\ell=2-\bar{d}}^0 \sum_{i=k+\ell-1}^{k-1} x_i^T R^{-1}(\alpha_i) x_i > 0, \quad (3.13) \end{aligned}$$

em que  $Q(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \alpha_{k(i)} Q_i$ ,  $\mathbf{0} < Q_i^T = Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $R(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \alpha_{k(i)} R_i$ ,  $\mathbf{0} < R_i^T = R_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Essa candidata à função fuzzy

L-K é não linear e composta por três termos. Note que as matrizes de Lyapunov são dependentes da função de pertinência.

Segundo (FRIDMAN, 2014; STOJANOVIĆ; DEBELJKOVIĆ; MLADENOVIĆ, 2007), a função  $V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k) > 0$  em (3.13) é dita ser uma função L-K se

$$\Delta V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k) = V(\varphi_{\bar{d},k+1}, \alpha_{k+1}) - V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k) < 0. \quad (3.14)$$

Então, a estabilidade assintótica do modelo fuzzy (3.9) para  $K(\alpha_k)$  e  $K_d(\alpha_k)$  dados e  $\alpha_k \in \Xi$  é suficiente quando a desigualdade (3.14) é verificada.

Primeiramente, é abordado o problema de estabilização local. Dessa forma, um problema fundamental é a caracterização da região de estabilidade  $\Upsilon_\varphi$ . Portanto, na seguinte definição é proposta a caracterização da região de estabilidade  $\Upsilon_\varphi$  por meio de dois conjuntos: o primeiro lida com o vetor de estado atual em  $k = 0$ , e o segundo trata dos estados atrasados.

**Definição 3.2** *A região de estabilidade  $\Upsilon_\varphi \subseteq E_\varphi$  é composta pelas sequências  $\varphi_{\bar{d},0}$  tais que*

$$\begin{aligned} \Upsilon_\varphi = \{ \varphi_{\bar{d},0} \in E_\varphi; \forall j \in \mathcal{I}[1, \bar{d} + 1], [\varphi_{\bar{d},0}]_j \in \mathcal{C}_x, j = \bar{d} + 1, \\ e [\varphi_{\bar{d},0}]_j \in \mathcal{B}_\phi, j \in \mathcal{I}[1, \bar{d}] \}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

em que

$$\mathcal{C}_x = \{x_0 \in E_{d+1}; V_1(x_0, \alpha_0) \leq c(\phi_{\bar{d},0})\} \subseteq \mathcal{V}_0, \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\phi = \{[\phi_{d,0}]_j \in E_j, j \in \mathcal{I}[1, d]; \|\phi_{d,0}\|_d \leq r \text{ e } [\phi_{d,0}]_j \in \mathcal{V}_0, \\ j \in \mathcal{I}[1, d]\}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$V_1(x_0, \alpha_0) = x_0^T Q^{-1}(\alpha_0)x_0$ ,  $c(\phi_{\bar{d},0})$  é uma função  $E_\phi \mapsto \mathbb{R}^+$  com a sequência  $\phi_{\bar{d},0}$  como argumento e  $r \in \mathbb{R}^+$ .

Essa definição difere da Definição 2.4, apresentada no Capítulo 2, em dois pontos: o conjunto  $\mathcal{C}_x$  e  $\bar{d}$ . A primeira ocorre pelo fato da candidata à função L-K aqui considerada ser dependente de parâmetros e suas matrizes serem inversas, diferentemente da candidata à função L-K utilizada no capítulo anterior que é independente de parâmetros e suas matrizes não estão invertidas. Já o atraso considerado neste momento é variante no tempo e limitado num valor máximo, distinguindo-se assim do capítulo anterior em que o atraso considerado é constante no tempo. Portanto, na definição aqui apresentada, utiliza-se a informação desse

atraso máximo para a caracterização da região de estabilidade.

Na caracterização de  $\Upsilon_\varphi$ , o conjunto  $\mathcal{C}_x$  descreve a região de valores permitidos para o vetor de condições iniciais  $x_0$  enquanto o conjunto  $\mathcal{B}_\phi$  define a região para os elementos  $[\phi_{\bar{d},0}]_j \in E_j$ , para  $j \in \mathcal{I}[1, \bar{d}]$ . No próximo lema é apresentado um resultado já conhecido na literatura, que é utilizado na caracterização de  $\Upsilon_\varphi$ .

**Lema 3.1** *Assuma que a função (3.13) é uma função L-K fuzzy. Um conjunto de nível associado ao termo  $V_1(x_k, \alpha_k) = x_k^T Q^{-1}(\alpha_k) x_k$  é dado pela intersecção dos conjuntos elipsoidais relativos às matrizes  $Q_i^T = Q_i > \mathbf{0}$ ,  $i \in \mathcal{I}[1, N]$ :*

$$\mathcal{L}_{V_1}(c) = \{\mathcal{E}(Q_i^{-1}, c), \forall \alpha_k \in \Xi\} = \bigcap_{\alpha_k \in \Xi} \mathcal{E}(Q^{-1}(\alpha_k), c) = \bigcap_{i \in \mathcal{I}[1, N]} \mathcal{E}(Q_i^{-1}, c) \subseteq \mathcal{V}_0, \quad (3.18)$$

em que  $c$  é um escalar positivo e  $\mathcal{E}(Q_i^{-1}, c)$ , para  $i \in \mathcal{I}[1, N]$ , denota os conjuntos elipsoidais definidos como se segue:

$$\mathcal{E}(Q_i^{-1}, c) = \{x_k \in \mathbb{R}^n; x_k^T Q_i^{-1} x_k \leq c\}. \quad (3.19)$$

*Prova:* A prova do Lema 3.1 pode ser encontrada em (JUNGERS; CASTELAN, 2011, Lemma 4). ■

As equações (3.18)–(3.19) são utilizadas para caracterizar conjuntos em que as correspondentes trajetórias do sistema permaneçam confinadas quando elas iniciam em  $\Upsilon_\varphi$ . No caso de  $c = 1$ , usam-se as notações simplificadas  $\mathcal{L}_{V_1} = \mathcal{L}_{V_1}(1)$  e  $\mathcal{E}(Q_i^{-1}) = \mathcal{E}(Q_i^{-1}, 1)$ . A partir desse momento são apresentados resultados utilizados para definir os parâmetros necessários para a caracterização dos conjuntos  $\mathcal{C}_x$  e  $\mathcal{B}_\phi$ , e, portanto,  $\Upsilon_\varphi$ . Primeiramente, considere o seguinte lema.

**Lema 3.2** *Considere que  $R(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \alpha_{k(i)} R_i$  e  $\mathbf{0} < R_i^T = R_i$ , então*

$$\lambda_{\max}(R^{-1}(\alpha_k)) \leq \max_i (\lambda_{\max}(R_i^{-1})), \quad (3.20)$$

para  $i \in \mathcal{I}[1, N]$  e  $\forall \alpha_k \in \Xi$ .

*Prova:* Pela positividade de  $R_i$ , tem-se

$$0 < \lambda_{\max}(R_i^{-1}) \leq \max_i (\lambda_{\max}(R_i^{-1})). \quad (3.21)$$

Considere que  $\max_i (\lambda_{\max}(R_i^{-1})) = \tilde{\lambda}$ , em que  $\tilde{\lambda}$  é um escalar positivo. Assim,  $\lambda_{\max}(R_i^{-1}) \leq \tilde{\lambda} \Leftrightarrow R_i^{-1} \leq \tilde{\lambda}\mathbf{I}$ , que pelo complemento de Schur:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\lambda}\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & R_i \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}. \quad (3.22)$$

Multiplicando-se a inequação (3.22) por  $\alpha_{k(i)}$ , somando-se em  $i \in \mathcal{I}[1, N]$ , sabendo-se que  $\sum_{i=1}^N \alpha_{k(i)} R_i = R(\alpha_k)$ , e aplicando-se o complemento de Schur no resultado, tem-se  $R^{-1}(\alpha_k) \leq \tilde{\lambda}\mathbf{I} \Leftrightarrow \lambda_{\max}(R^{-1}(\alpha_k)) \leq \tilde{\lambda}$ . Portanto, prova-se o Lema 3.2. ■

**Lema 3.3** *Se  $V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k)$  definida em (3.13) é uma função L-K fuzzy para o modelo fuzzy em malha fechada (3.9) e  $\mathcal{L}_{V_1} \subseteq \mathcal{V}_0$ , então a região  $\Upsilon_\varphi$  caracterizada por*

$$\mathcal{C}_x = \{x_0 \in \mathbb{R}^n; V_1(x_0, \alpha_0) \leq 1 - \rho \|\phi_{\bar{d},0}\|_{\bar{d}}^2\} \subseteq \mathcal{V}_0, \quad (3.23)$$

com

$$\rho = \max_{i \in \mathcal{I}[1, N]} (\lambda_{\max}(R_i^{-1})) \left( \frac{\bar{d}^2 - \bar{d} + 2}{2} \right) \quad (3.24)$$

e  $r$  em (2.57) satisfazendo

$$0 \leq r \leq \rho^{-\frac{1}{2}} \quad (3.25)$$

é uma região de estabilidade assintótica para o modelo fuzzy em malha fechada (3.9).

*Prova:* Considere o Lema 3.1 com  $c = 1 - \rho \|\phi_{\bar{d},0}\|_{\bar{d}}^2$ . Então, tem-se

$$\mathcal{C}_x = \mathcal{L}_{V_1}(1 - \rho \|\phi_{\bar{d},0}\|_{\bar{d}}^2) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n; x_0^T Q^{-1}(\alpha_0) x_0 \leq 1 - \rho \|\phi_{\bar{d},0}\|_{\bar{d}}^2\} \subseteq \mathcal{V}_0. \quad (3.26)$$

Dos dois termos do lado direito da igualdade na função fuzzy L-K e do

Lema 3.2, tem-se que a variável  $\rho$  satisfaz:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=k-d_k}^{k-1} x_i^T R^{-1}(\alpha_i) x_i + \sum_{\ell=2-\bar{d}}^0 \sum_{i=k+\ell-1}^{k-1} x_i^T R^{-1}(\alpha_i) x_i \\
& \leq \sum_{j=-d_k}^{-1} [\phi_{\bar{d},0}]_{\bar{d}+1+j}^T R^{-1}(\alpha_j) [\phi_{\bar{d},0}]_{\bar{d}+1+j} + \sum_{\ell=1-\bar{d}}^{-1} \sum_{j=\ell}^{-1} [\phi_{\bar{d},0}]_{\bar{d}+1+j}^T \\
& \quad \times R^{-1}(\alpha_j) [\phi_{\bar{d},0}]_{\bar{d}+1+j} \leq \rho \|\phi_{\bar{d},0}\|_{\bar{d}}^2. \quad (3.27)
\end{aligned}$$

Além disso, é necessário que  $0 \leq c \leq 1$  e para isso é preciso que  $0 \leq r \leq \rho^{-\frac{1}{2}}$  em (2.57). ■

Para finalizar, apresenta-se o lema a seguir que mostra a conexão existente entre os conjuntos  $\mathcal{C}_x$  e  $\mathcal{B}(r)$  em termos do confinamento das trajetórias em  $\mathcal{L}_{V_1}$  e da estabilidade local.

**Lema 3.4** *Se  $V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k) > 0$  e  $\Delta V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k) = V(\varphi_{\bar{d},k+1}, \alpha_{k+1}) - V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k) < 0$ , então*

$$V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k) < V(\varphi_{\bar{d},0}, \alpha_0) \leq x_0^T Q^{-1}(\alpha_0) x_0 + \rho \|\phi_{\bar{d},0}\|_{\bar{d}}^2. \quad (3.28)$$

*Portanto,  $\forall x_0 \in \mathcal{C}_x = \mathcal{L}_{V_1}(1 - \rho \|\phi_{\bar{d},0}\|_{\bar{d}}^2) \subseteq \mathcal{V}_0$  e  $[\phi_{\bar{d},0}]_j \in \mathcal{B}_\phi$ ,  $j \in \mathcal{I}[1, \bar{d}]$  é garantido que  $x_k \in \mathcal{L}_{V_1}$ ,  $\forall k \geq 0$ , e  $\lim_{k \rightarrow \infty} [\varphi_{\bar{d},k}]_j = \mathbf{0}$ , para  $j \in \mathcal{I}[1, \bar{d} + 1]$ .*

*Prova:* Considerando-se (3.13),  $\Delta V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k) < 0$  e  $\alpha_k \in \Xi$ , para  $k > 0$ , verifica-se que:

$$x_k^T Q^{-1}(\alpha_k) x_k \leq V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k) < V(\varphi_{\bar{d},0}, \alpha_0). \quad (3.29)$$

Utilizando-se (3.24) e (3.27), tem-se:

$$V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k) < V(\varphi_{\bar{d},0}, \alpha_0) \leq x_0^T Q^{-1}(\alpha_0) x_0 + \rho \|\phi_{\bar{d},0}\|_{\bar{d}}^2. \quad (3.30)$$

A partir de (3.29) e (3.30), pode-se constatar que se  $x_0^T Q^{-1}(\alpha_0) x_0 \leq 1 - \rho \|\phi_{\bar{d},0}\|_{\bar{d}}^2$ , então  $x_k^T Q^{-1}(\alpha_k) x_k \leq 1$  e  $\lim_{k \rightarrow \infty} [\varphi_{\bar{d},k}]_j = \mathbf{0}$ ,  $j \in \mathcal{I}[1, \bar{d} + 1]$ . Portanto, a estabilidade assintótica local do sistema em malha fechada é assegurada. ■

Considerando-se neste momento o problema da estabilização lo-

cal no sentido  $\ell_2$ , tem-se que as condições iniciais do sistema não linear (3.1) são nulas e  $\omega_k$  é diferente de zero. Sendo assim, um conjunto de nível associado à candidata à função fuzzy L-K (3.13) pode ser definido como se segue:

$$\mathcal{L}_V(\delta^{-1}) = \{[\varphi_{\bar{d},k}]_j \in E_j, j \in \mathcal{I}[1, \bar{d} + 1]; V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k) \leq \delta^{-1}\}. \quad (3.31)$$

Para garantir a local-ISS, é necessário que exista uma sequência  $\varphi_{\bar{d},k}$  que satisfaça as condições do conjunto  $\mathcal{L}_V$  e  $x_k \in \mathcal{V}_0$ . Note que garantir algebricamente que  $x_k \in \mathcal{V}_0$  a partir de  $\mathcal{L}_V$  não é uma tarefa simples. Uma alternativa para contornar essa dificuldade é assumir que o sistema não linear discreto no tempo com atraso nos estados em malha fechada tenha condições iniciais nulas, isto é,  $[\varphi_{\bar{d},k}]_j = \mathbf{0}$ , para  $j \in \mathcal{I}[1, \bar{d} + 1]$ , e tomar o conjunto  $\mathcal{L}_{V_1}(\delta^{-1})$ , dado por:

$$\mathcal{L}_{V_1}(\delta^{-1}) = \{x_k \in E_x; V_1(x_k, \alpha_k) \leq \delta^{-1}\}. \quad (3.32)$$

Sendo  $V_1(x_k, \alpha_k) = x_k^T Q^{-1}(\alpha_k)x_k$ , tem-se que a operação  $V_1(x_k, \alpha_k) \leq \delta^{-1}$  é realizada de forma simples algebricamente e, além disso, é possível garantir a inclusão de  $\mathcal{L}_{V_1}(\delta^{-1})$  em  $\mathcal{V}_0$  o que resulta em  $x_k \in \mathcal{V}_0$ .

Seguindo o Lema 3.1, tem-se que o conjunto de nível  $\mathcal{L}_{V_1}(\delta^{-1})$  pode ser definido como a intersecção dos conjuntos elipsoidais:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{V_1}(\delta^{-1}) \triangleq \bigcap_{i \in \mathcal{I}[1, N]} \mathcal{E}(Q_i^{-1}, \delta^{-1}) = \\ \{x_k \in E_x; x_k^T Q_i^{-1} x_k \leq \delta^{-1}\} \subseteq \mathcal{V}_0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Na sequência, fornecem-se alguns resultados preliminares, que são importantes para entender o resultado principal relacionado à estabilização local no sentido  $\ell_2$ .

**Lema 3.5** *Para um dado  $\delta > 0$ , a estabilidade local no sentido  $\ell_2$  do sistema não linear (3.1) em malha fechada a partir da lei de controle fuzzy (3.7)–(3.8), com  $[\varphi_{\bar{d},0}]_j = \mathbf{0}$ , para  $j \in \mathcal{I}[1, \bar{d} + 1]$ , é garantida se*

$$\Delta V \triangleq V(\varphi_{\bar{d},k+1}, \alpha_{k+1}) - V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k) < \omega_k^T \omega_k, \quad (3.34)$$

para  $x_k \in \mathcal{L}_{V_1}(\delta^{-1}) \Leftrightarrow \alpha_k \in \Xi$  e  $\omega_k \in E_\omega$ .

*Prova:* Considere que (3.13) é uma função fuzzy L-K e, assim, (3.34) é verificado, com  $x_k \in \mathcal{L}_{V_1}(\delta^{-1}) \subseteq \mathcal{V}_0$ ,  $\alpha_k \in \Xi$  e  $\omega_k \in E_\omega$ . Então, para



algum  $\bar{k} > 0$ , tem-se:

$$\sum_{k=0}^{\bar{k}-1} \{V(\varphi_{\bar{d},k+1}, \alpha_{k+1}) - V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k)\} < \sum_{k=0}^{\bar{k}-1} \omega_k^T \omega_k,$$

o que implica em

$$V(\varphi_{\bar{d},\bar{k}}, \alpha_{\bar{k}}) - V(\varphi_{\bar{d},0}, \alpha_0) < \sum_{k=0}^{\bar{k}-1} \omega_k^T \omega_k \leq \delta^{-1}.$$

Assim, pela hipótese que  $[\varphi_{\bar{d},0}]_j = \mathbf{0}$ ,  $j \in \mathcal{I}[1, \bar{d}+1]$ , tem-se  $V(\varphi_{\bar{d},\bar{k}}, \alpha_{\bar{k}}) \leq \sum_{k=0}^{\bar{k}-1} \omega_k^T \omega_k \leq \delta^{-1}$ , para todo  $\bar{k} > 0$ ,  $\delta \in \mathbb{R}^+$  e, considerando (3.13),  $V_1(x_{\bar{k}}, \alpha_{\bar{k}}) \leq \delta^{-1}$ . ■

No corolário a seguir, mostra-se uma consequência do Lema 3.5 quando  $\omega_k = 0$ , para todo  $k > 0$  e  $[\varphi_{\bar{d},k}]_j \in \mathcal{V}_0$ , para  $j \in \mathcal{I}[1, \bar{d}+1]$ . Nesse caso, conclui-se que o sistema não linear em malha fechada é assintoticamente estável e  $x_k \in \mathcal{L}_{V_1}(\delta^{-1}) \Rightarrow \alpha_k \in \Xi$ , sempre que a perturbação  $\omega_k$  for nula.

**Corolário 3.1** *Considere que (3.13) é uma função L-K fuzzy, (3.34) é verificado,  $\omega_k = 0$  e  $k > 0$ . Então,*

$$V(\varphi_{\bar{d},k+1}, \alpha_{k+1}) - V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k) < 0 \quad (3.35)$$

e o sistema não linear (3.1) em malha fechada sob a lei de controle (3.7)–(3.8) com  $\omega_k = 0$  é assintoticamente estável,  $\forall k > 0$ ,  $[\varphi_{\bar{d},k}]_j \in \mathcal{V}_0$ , sendo  $j \in \mathcal{I}[1, \bar{d}+1]$ ,  $x_k \in \mathcal{L}_{V_1}(\delta^{-1}) \Rightarrow \alpha_k \in \Xi$  e as trajetórias resultantes convergem para origem sem deixar  $\mathcal{L}_{V_1}(\delta^{-1}) \subseteq \mathcal{V}_0$ .

*Prova:* Considerando  $\omega_k = 0$ , para todo  $k > 0$ , e a partir de (3.34), chega-se em (3.35). Além disso, seguindo (3.31) e (3.32), tem-se

$$V_1(x_{k+1}, \alpha_{k+1}) \leq V(\varphi_{\bar{d},k+1}, \alpha_{k+1}) < V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k) \leq \delta^{-1}. \quad (3.36)$$

Então, o sistema não linear (3.1) em malha fechada por meio da lei de controle fuzzy (3.7)–(3.8) é garantido ser assintoticamente estável com as trajetórias  $x_k$  convergindo para a origem sem deixar  $\mathcal{L}_{V_1}(\delta^{-1}) \subseteq \mathcal{V}_0$ . ■

### 3.3 RESULTADOS PRINCIPAIS

Nesta seção são apresentadas soluções para os problemas 3.1 e 3.2, estabilização local e estabilização local no sentido  $\ell_2$ , respectivamente.

#### 3.3.1 Estabilização local

Baseado na candidata à função fuzzy L-K (3.13) e nos Lemas 3.1 e 3.4, é apresentado na sequência o teorema para a solução do Problema 3.1. A partir desse teorema calculam-se ganhos fuzzy para a lei de controle (3.7)–(3.8) de tal forma que o sistema não linear em malha fechada resultante sem ação de perturbação externa seja assintoticamente estável localmente.

**Teorema 3.1** *Suponha que existam as matrizes definidas positivas  $Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $R_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , para  $i \in \mathcal{I}[1, N]$ , e as matrizes  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $Y_{di} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  verificando as seguintes LMIs,  $\forall i, \ell, q \in \mathcal{I}[1, N]$ ,  $j \in \mathcal{I}[i, N]$  e  $\forall r \in \mathcal{I}[1, \kappa]$ :*

$$\begin{bmatrix} -Q_q & 0.5(A_i U + B_i Y_j + A_j U + B_j Y_i) \\ \star & 0.5(Q_i + Q_j) - U^T - U \\ \star & \star \\ \star & \star \\ 0.5(A_{di} H + B_i Y_{dj} + A_{dj} H + B_j Y_{di}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U^T \\ R_\ell - H^T - H & \mathbf{0} \\ \star & -\frac{R_i + R_j}{2\bar{d}} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (3.37)$$

$$\begin{bmatrix} -Q_i & Q_i L_{(r)}^T \\ \star & -\eta_{(r)}^2 \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}. \quad (3.38)$$

Então, as matrizes da lei de controle (3.7)–(3.8) obtidas a partir de

$$K_i = Y_i U^{-1} \quad e \quad K_{di} = Y_{di} H^{-1} \quad (3.39)$$

são tais que a origem do sistema não linear (3.1) com  $\omega_k = 0$  em

malha fechada pela lei de controle (3.7)–(3.8) é assintoticamente estável para o conjunto de condições iniciais  $\Upsilon_\varphi$ , com  $0 \leq r \leq \rho^{-\frac{1}{2}}$  e  $\rho$  dado por (3.24), assegurando que as respectivas trajetórias permaneçam em  $\mathcal{L}_{V_1} \subseteq \mathcal{V}_0$ .

*Prova:* Primeiramente, é mostrado que a factibilidade de (3.37) assegura a estabilidade local assintótica do modelo fuzzy (3.2)–(3.4) em malha fechada pela lei de controle (3.7)–(3.8) com os ganhos dados por (3.8) e (3.39) sempre que as trajetórias dos estados evoluírem no interior de  $\mathcal{V}_0$ . Em seguida, se (3.38) é verificada, pode-se calcular uma região de estabilidade  $\Upsilon_\varphi$  com  $\rho$  dado por (3.24) e escolhendo  $r$  como mostrado em (3.25). Então, as trajetórias geradas por condições iniciais definidas no interior da região de estabilidade para o modelo fuzzy T-S (3.2)–(3.4) em malha fechada a partir da lei de controle (3.7)–(3.8) são estáveis e permanecem em  $\mathcal{L}_{V_1} \subseteq \mathcal{V}_0$ . Portanto, garante-se a estabilidade local assintótica do sistema não linear (3.1) com  $\omega_k = 0$  em malha fechada sob a lei de controle (3.7)–(3.8) com os ganhos dados por (3.39).

Se (3.37) é verificada, então assegura-se a positividade de  $R_i$  e  $Q_i$ ,  $i \in \mathcal{I}[1, N]$  e, em consequência,  $V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k)$  verifica (3.13). Além disso, a regularidade de  $U$  e  $H$  é assegurada pelos blocos (2, 2) e (3, 3). Substituindo  $Y_i$  e  $Y_{di}$  por  $K_i U$  e  $K_{di} H$ , respectivamente, multiplicando a inequação resultante sucessivamente por  $\alpha_{k(i)}$ ,  $\alpha_{k(j)}$ ,  $\alpha_{k+1(q)}$  e  $\alpha_{k-d_k(\ell)}$  e somando  $i \in \mathcal{I}[1, N]$ ,  $j \in \mathcal{I}[i, N]$ ,  $q \in \mathcal{I}[1, N]$ ,  $\ell \in \mathcal{I}[1, N]$ , obtém-se

$$\Theta_k = \begin{bmatrix} -Q(\alpha_k^+) & \hat{A}(\alpha_k)U & \hat{A}_d(\alpha_k)H \\ \star & Q(\alpha_k) - U - U^T & \mathbf{0} \\ \star & \star & R(\alpha_k^-) - H - H^T \\ \star & \star & \star \\ & & \mathbf{0} \\ & & U^T \\ & & \mathbf{0} \\ & & -\frac{R(\alpha_k)}{\bar{d}} \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (3.40)$$

em que  $\hat{A}(\alpha_k)$  e  $\hat{A}_d(\alpha_k)$  são dados em (3.10) e (3.11), respectivamente,  $\alpha_k^+ \equiv \alpha_{k+1}$  e  $\alpha_k^- \equiv \alpha_{k-d_k}$ . Note que as matrizes definidas positivas  $Q(\alpha_k)$  e  $R(\alpha_k)$  podem ser reescritas como

$$F(\alpha_k) = \left( \sum_{j=1}^N \alpha_j \right) F(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^N \mu_{ij} \alpha_{k(i)} \alpha_{k(j)} \frac{F_i + F_j}{2},$$

sendo que  $F(\alpha_k)$  pode ser substituída por  $Q(\alpha_k)$  e  $R(\alpha_k)$ , com  $\mu_{ij}$  dado em (3.12),  $Q(\alpha_k^+) = \sum_{q=1}^N \alpha_{k(q)}^+ Q_q$ ,  $R(\alpha_k^-) = \sum_{\ell=1}^N \alpha_{k(\ell)}^- R_\ell$ .

Pelo motivo da desigualdade  $-M^T G^{-1} M \leq G - M^T - M$  ser verdadeira para todos os pares de matrizes quadráticas  $M$  e  $G = G^T > \mathbf{0}$ , isso pode ser comprovado no Apêndice A.4, ela pode ser aplicada nos blocos (2, 2) e (3, 3) de  $\Theta_k$  para obter  $\bar{\Theta}_k \leq \Theta_k$ , em que

$$\bar{\Theta}_k = \begin{bmatrix} -Q(\alpha_k^+) & \hat{A}(\alpha_k)U & \hat{A}_d(\alpha_k)H \\ \star & -U^T Q^{-1}(\alpha_k)U & \mathbf{0} \\ \star & \star & -H^T R^{-1}(\alpha_k^-)H \\ \star & \star & \star \\ & \mathbf{0} & \\ & U^T & \\ & \mathbf{0} & \\ & -\frac{R(\alpha_k)}{\bar{d}} & \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (3.41)$$

Então, aplicando o complemento de Schur em (3.41), chega-se em

$$\tilde{\Pi}_k = \begin{bmatrix} -Q(\alpha_k^+) & \hat{A}(\alpha_k)U \\ \star & U^T [\bar{d}R^{-1}(\alpha_k) - Q^{-1}(\alpha_k)] U \\ \star & \star \\ & \hat{A}_d(\alpha_k)H \\ & \mathbf{0} \\ & -H^T R^{-1}(\alpha_k^-)H \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (3.42)$$

Assim, levando em consideração a regularidade de  $U$  e  $H$ , considera-se a transformação de congruência  $\Pi_k = \mathcal{T}^T \tilde{\Pi}_k \mathcal{T}$  com  $\mathcal{T} = \text{diag}\{\mathbf{I}, U^{-1}, H^{-1}\}$ . Isso permite obter-se

$$\Pi_k = \begin{bmatrix} -Q(\alpha_k^+) & \hat{A}(\alpha_k) & \hat{A}_d(\alpha_k) \\ \star & \bar{d}R^{-1}(\alpha_k) - Q^{-1}(\alpha_k) & \mathbf{0} \\ \star & \star & -R^{-1}(\alpha_k^-) \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (3.43)$$

Novamente, utilizando o complemento de Schur nessa última desigualdade, tem-se

$$\begin{bmatrix} \bar{d}R^{-1}(\alpha_k) - Q^{-1}(\alpha_k) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -R^{-1}(\alpha_k^-) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{A}^T(\alpha_k) \\ \hat{A}_d^T(\alpha_k) \end{bmatrix} Q^{-1}(\alpha_k^+) \\ \times \begin{bmatrix} \hat{A}(\alpha_k) & \hat{A}_d(\alpha_k) \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (3.44)$$

Pré e pós-multiplicando (3.44) por  $\tilde{X}_k^T = [x_k^T \ x_{k-d_k}^T]$  e sua transposta, respectivamente, e a partir de (3.9)–(3.11), substitui-se  $\hat{A}(\alpha_k)x_k + \hat{A}_d(\alpha_k)x_{k-d_k}$  por  $x_{k+1}$ , obtendo-se

$$\begin{aligned} \Omega_k = x_{k+1}^T Q^{-1}(\alpha_k^+) x_{k+1} + x_k^T [\bar{d}R^{-1}(\alpha_k) - Q^{-1}(\alpha_k)] x_k \\ - x_{k-d_k}^T R^{-1}(\alpha_k^-) x_{k-d_k} < 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Assim, seguindo (LEITE; MIRANDA, 2008), obtém-se por meio de (3.13):

$$\Delta V(\varphi_k, \alpha_k) \leq \Omega_k < 0. \quad (3.46)$$

Portanto, pode-se concluir que a factibilidade de (3.37) assegura a negatividade de  $\Delta V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k)$  que com a positividade de  $V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k)$  e o teorema de Lyapunov-Krasovskii (NICULESCU, 2001, Pag 31) garante-se a estabilidade local do modelo fuzzy T-S (3.2) com  $\omega_k = 0$  em malha fechada sob a lei de controle (3.7)–(3.8) com ganhos dados por (3.39) sempre que as trajetórias dos estados evoluírem somente no interior do conjunto  $\mathcal{V}_0$ .

Neste momento, assuma que (3.37) é verificada e adicionalmente (3.38) é satisfeita. Então, multiplicando (3.38) por  $\alpha_{k(i)}$  e somando para  $i \in \mathcal{I}[1, N]$ , obtém-se:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -Q(\alpha_k) & Q(\alpha_k)L_{(\ell)}^T \\ \star & -\eta_{(\ell)}^2 \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}. \quad (3.47)$$

Utilizando a transformação de congruência  $\mathcal{F}^T \Lambda \mathcal{F} = \tilde{\Lambda}$  com  $\mathcal{F} = \text{diag}\{Q^{-1}(\alpha_k), 1\}$ , chega-se em

$$\tilde{\Lambda} = \begin{bmatrix} -Q^{-1}(\alpha_k) & L_{(\ell)}^T \\ \star & -\eta_{(\ell)}^2 \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}. \quad (3.48)$$

Aplicando o complemento de Schur em  $\tilde{\Lambda}$ , tem-se:

$$L_{(\ell)}^T \eta_{(\ell)}^{-2} L_{(\ell)} - Q^{-1}(\alpha_k) \leq \mathbf{0}. \quad (3.49)$$

Nessa última desigualdade, pré e pós-multiplica-se por  $x_k^T$  e  $x_k$ , respectivamente, tem-se que:

$$x_k^T L_{(\ell)}^T \eta_{(\ell)}^{-2} L_{(\ell)} x_k \leq 1 \text{ e } x_k^T Q^{-1}(\alpha_k) x_k \leq 1, \quad (3.50)$$

sendo que a primeira desigualdade em (3.50) representa  $\mathcal{V}_0$  e a segunda representa  $\mathcal{L}_{V_1}$ . Então, satisfazendo-se a desigualdade (3.38), prova-se que  $\mathcal{L}_{V_1} \subseteq \mathcal{V}_0$  e qualquer trajetória que comece em  $\Upsilon_\varphi$  permanece em  $\mathcal{L}_{V_1}$  e, assim, a estabilidade local do sistema não linear (3.1) com  $\omega_k = 0$  em malha fechada sob a lei de controle (3.7)–(3.8) com ganhos dados por (3.39) é assegurada. ■

A seguir, esse teorema é explorado em um problema de otimização convexa de tal forma a maximizar o tamanho da região de estabilidade  $\Upsilon_\varphi$ .

### 3.3.1.1 Problema de otimização

O objetivo de controle é determinar a lei de controle definida por (3.7)–(3.8), com a região de estabilidade  $\Upsilon_\varphi$  a maior possível, verificando as seguintes inclusões  $\mathcal{C}_x \subseteq \mathcal{L}_{V_1} \subseteq \mathcal{V}_0$ . Para isso, pode-se proceder da seguinte maneira:

1. Minimizando  $\rho$ , tem-se  $\mathcal{C}_x = \mathcal{L}_{V_1}(1 - \rho\|\phi_{\bar{d},0}\|_{\bar{d}}^2)$  tão grande quanto  $\mathcal{L}_{V_1}$ . Além disso,  $r$  em  $\mathcal{B}_\phi$  está limitado por  $\rho^{-1/2}$ , ou seja, quanto menor o valor de  $\rho$  maiores os valores que  $r$  pode assumir. De acordo com o Lema 3.2 e (3.24), para minimizar  $\rho$  é necessário minimizar  $\lambda_{\max}(R^{-1}(\alpha_i))$ . Portanto,  $R^{-1}(\alpha_i) \leq W$ , em que  $\mathbf{0} < W = W^T$ , tem-se

$$\begin{bmatrix} W & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & R_i \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad i \in \mathcal{I}[1, N]. \quad (3.51)$$

2. Além disso, otimiza-se o tamanho de  $\mathcal{L}_{V_1}$  para ter  $\mathcal{L}_{V_1}$  tão grande quanto  $\mathcal{V}_0$ . Com isso, considera-se uma elipse inclusa no conjunto de nível  $\mathcal{L}_{V_1}$ :

$$\mathcal{E}(W) = \{x \in \mathbb{R}^n; x^T W x \leq 1\} \subset \mathcal{L}_{V_1}, \quad (3.52)$$

Portanto, essa inclusão é equivalente a:

$$\begin{bmatrix} W & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & Q_i \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad i \in \mathcal{I}[1, N]. \quad (3.53)$$

Assim, um problema de otimização convexa é proposto como segue:

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{traço}(W) \\ \text{sujeito a} \quad & (3.37), (3.38), (3.51) \text{ e } (3.53). \end{aligned} \quad (3.54)$$

### 3.3.2 Estabilização local $\ell_2$

É apresentado no teorema a seguir condições convexas para a síntese de controladores fuzzy T-S para a estabilização local no sentido  $\ell_2$  de sistemas não lineares discretos no tempo com atraso variante nos estados e afetados por perturbações  $\ell_2$ .

**Teorema 3.2** *Suponha que existam as matrizes  $\mathbf{0} < Q_i^T = Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\mathbf{0} < R_i^T = R_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , para  $i \in \mathcal{I}[1, N]$ , e matrizes  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $Y_{di} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  verificando as seguintes LMIs,  $\forall i, \ell, q \in \mathcal{I}[1, N]$ ,  $j \in \mathcal{I}[i, N]$  e  $r \in \mathcal{I}[1, \kappa]$ :*

$$\begin{bmatrix} -Q_q & 0.5(A_i U + B_i Y_j + A_j U + B_j Y_i) \\ \star & 0.5(Q_i + Q_j) - U^T - U \\ \star & \star \\ \star & \star \\ \star & \star \\ 0.5(A_{di} H + B_i Y_{dj} + A_{dj} H + B_j Y_{di}) & 0.5(B_{\omega i} + B_{\omega j}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ R_\ell - H^T - H & \mathbf{0} \\ \star & -\mathbf{I} \\ \star & \star \\ \mathbf{0} & \\ U^T & \\ \mathbf{0} & \\ \mathbf{0} & \\ -\frac{R_i + R_j}{2\bar{d}} & \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (3.55)$$

$$\begin{bmatrix} -Q_i & Q_i L_{(r)}^T \\ \star & -\delta \eta_{(r)}^2 \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}, \quad (3.56)$$

sendo que as matrizes do controlador (3.7)–(3.8) são calculadas como

$$K_i = Y_i U^{-1} \quad \text{e} \quad K_{di} = Y_{di} H^{-1}. \quad (3.57)$$

Então, as seguintes afirmações são verdadeiras para o sistema não linear (3.1) em malha fechada a partir da lei de controle (3.7)–(3.8) com condições iniciais nulas:

- a trajetória de malha fechada  $x_k$  permanece limitada em  $\mathcal{L}_{V_1}$  para qualquer  $\omega_k \in E_\omega$ ;
- $\mathcal{L}_{V_1}(\delta^{-1}) \subseteq \mathcal{E}(Q_i^{-1}, \delta^{-1}) \subset \mathcal{V}_0$  e, assim,  $x_k \in \mathcal{V}_0$  para todo  $k > 0$ ;
- se existe  $\tilde{k} \geq 0$  tal que  $\omega_k = \mathbf{0}$ ,  $\forall k > \tilde{k}$ , a trajetória  $x_k$  converge para a origem a medida que  $k$  aumenta.

*Prova:* A prova desse teorema segue os mesmos passos da prova apresentada para o Teorema 3.1. Sendo assim, prosseguindo da mesma forma como em (3.40)–(3.44), chega-se em

$$\begin{bmatrix} \bar{d}R^{-1}(\alpha_k) - Q^{-1}(\alpha_k) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -R^{-1}(\alpha_k^-) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{A}^T(\alpha_k) \\ \hat{A}_d^T(\alpha_k) \\ B_\omega^T(\alpha_k) \end{bmatrix} Q^{-1}(\alpha_k^+) \\ \times [\hat{A}^T(\alpha_k) \quad \hat{A}_d^T(\alpha_k) \quad B_\omega^T(\alpha_k)] < \mathbf{0}. \quad (3.58)$$

Pré e pós-multiplicando (3.58) por  $\tilde{X}_k^T = [x_k^T \quad x_{k-d_k}^T \quad \omega_k^T]$  e sua transposta, respectivamente, e a partir de (3.9)–(3.11), pode-se substituir  $\hat{A}(\alpha_k)x_k + \hat{A}_d(\alpha_k)x_{k-d_k} + B_\omega(\alpha_k)\omega_k$  por  $x_{k+1}$ , produzindo

$$\Omega_k \equiv x_{k+1}^T Q^{-1}(\alpha_k^+) x_{k+1} + x_k^T [\bar{d}R^{-1}(\alpha_k) - Q^{-1}(\alpha_k)] x_k \\ - x_{k-d_k}^T R^{-1}(\alpha_k^-) x_{k-d_k} - \omega_k^T \omega_k < 0. \quad (3.59)$$

Por outro lado, pode-se obter a partir de (3.13) e (3.34):

$$\Delta V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k) \leq \Omega_k < 0. \quad (3.60)$$

Adicionalmente, pela LMI (3.56) a inclusão  $\mathcal{L}_{V_1}(\delta^{-1}) \subseteq \mathcal{E}(Q_i^{-1}, \delta^{-1}) \subseteq \mathcal{V}_0$  é garantida. Portanto, a partir do Lema 3.5, pode-se concluir que o sistema em malha fechada é ISS no sentido  $\ell_2$  com  $\mathcal{L}_{V_1}(\delta^{-1}) \subseteq \mathcal{V}_0$ . A prova está completa. ■

O Teorema 3.2 é utilizado para resolver o problema 3.2. Com o intuito de aprimorar a solução desse problema a partir do teorema mencionado, propõem-se três problemas de otimização convexa, que calculam ganhos para o controlador (3.7)–(3.8). O primeiro problema



proposto calcula esses ganhos de tal forma a maximizar a energia do sinal de perturbação admissível. Já os outros dois problemas de otimização propostos calculam os ganhos do controlador em questão que minimizam o efeito de uma dada perturbação nos estados. Todos esses problemas de otimização convexa são abordados a seguir.

### 3.3.2.1 Perturbação admissível

O interesse neste momento é calcular os ganhos do controlador fuzzy (3.7)–(3.8), tal que dado o domínio de validade  $\mathcal{V}_0$ , o sistema não linear (3.1) em malha fechada tolere perturbações de energia máxima e, assim, as trajetórias resultantes permaneçam limitadas no interior do domínio de validade. Para isso, propõe-se o seguinte problema de otimização convexa:

$$\left. \begin{array}{l} \min \delta \\ Q_i, R_i, Y_i, Y_{di}, U, H \\ \text{sujeito a (3.55) e (3.56).} \end{array} \right\} \mathcal{P}_{tol} \quad (3.61)$$

Então, a minimização de  $\delta$  implica na maximização do conjunto de perturbações admissíveis  $E_\omega$ .

### 3.3.2.2 Atenuação de perturbação

O objetivo neste ponto é calcular os ganhos  $K_i$  e  $K_{di}$ , para  $i \in \mathcal{I}[1, N]$ , tal que para um dado  $\delta$  limitado, o efeito da perturbação seja minimizado nos estados. Portanto, propõem-se dois problemas de otimização para calcular os ganhos mencionados.

**Caso 1:** A partir de um valor dado de  $\delta$ , considera-se a inclusão  $\mathcal{E}(Q_i^{-1}, \delta^{-1}) \subset \beta \mathcal{V}_0$ ,  $\forall i \in \mathcal{I}[1, N]$ , e  $0 < \beta \leq 1$ , ou seja,

$$\begin{bmatrix} -Q_i & Q_i L_{(r)}^T \\ \star & -\beta^2 \delta \eta_{(r)}^2 \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}. \quad (3.62)$$

Assim, o objetivo é minimizar  $\beta$  por meio do cálculo dos ganhos do controlador fuzzy. Para isso, propõe-se o seguinte problema de otimização

convexa:

$$\left. \begin{array}{l} \min \beta \\ Q_i, R_i, Y_i, Y_{di}, U, H \\ \text{sujeito a } (3.55) \text{ e } (3.62). \end{array} \right\} \mathcal{P}_{att1} \quad (3.63)$$

**Caso 2:** Novamente, para um dado valor de  $\delta$ , considera-se a inclusão  $\mathcal{E}(Q_i^{-1}, \delta^{-1}) \subset \mathcal{E}(\epsilon^{-1}\mathbf{I}, 1)$ , em que

$$\mathcal{E}(\epsilon^{-1}\mathbf{I}, 1) = \{x_k \in E_x; x_k^T \epsilon^{-1}\mathbf{I}x_k \leq 1\}. \quad (3.64)$$

Essa inclusão é equivalente a:

$$\begin{bmatrix} -\delta\mathbf{I} & Q_i \\ Q_i & -\epsilon\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}. \quad (3.65)$$

Então, o objetivo é minimizar  $\epsilon$  e, para isso, propõe-se o seguinte problema de otimização convexa:

$$\left. \begin{array}{l} \min \epsilon \\ Q_i, R_i, Y_i, Y_{di}, U, H \\ \text{sujeito a } (3.55), (3.56) \text{ e } (3.65). \end{array} \right\} \mathcal{P}_{att2} \quad (3.66)$$

### 3.4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Como na seção anterior, são apresentados separadamente os exemplos relativos à estabilização local e à estabilização local no sentido  $\ell_2$ .

#### 3.4.1 Estabilização local

Os três sistemas apresentados no Exemplo 2.2.1 do Capítulo 2 são utilizados para ilustrar os resultados referentes à estabilização local.

##### 3.4.1.1 Sistemas acadêmicos

Considere o sistema não linear discreto no tempo com atraso nos estados (2.18). Neste momento é considerado que o atraso  $d_k$  é variável e  $d_k \in \mathcal{I}[1, 5]$ . Lembrando-se que esse sistema abrange dois casos, um em que  $c_1 = c_2 = 1$  e o outro quando  $c_1 = 0.64$  e  $c_2 = 0.8$ . Em ambos os modelos fuzzy T-S obtidos, a região de validade determinada é (3.6),

com

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \eta = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Para os dois modelos fuzzy T-S estudados aqui foram utilizados dois resultados de síntese de controladores, sendo um desses o problema de otimização (3.54) apresentado neste capítulo e o outro referente às condições de síntese de controlador fuzzy T-S do artigo (GAO; LIU; LAM, 2009). Em ambos os casos é considerado que se tem acesso ao valor do atraso em tempo real e, assim, a tentativa de solução foi em busca de leis de controle que realimentem os estados atuais e os estados atrasados. Assim, foi necessário adaptar as condições propostas em (GAO; LIU; LAM, 2009), pois as mesmas, como apresentadas no artigo, calculam leis de controle que realimentam somente os estados atuais,  $u_k = K(\alpha_k)x_k$ . Foi considerado ainda que  $\epsilon = 2$ , sendo  $\epsilon$  um parâmetro de sintonia.

Em ambos os casos foram obtidos resultados factíveis, sendo que pelo problema de otimização (3.54) foi obtida uma lei de controle que estabiliza localmente o sistema não linear original, já, a partir das condições apresentadas em (GAO; LIU; LAM, 2009), o controlador estabiliza globalmente o modelo fuzzy. Para fazer uma comparação dos controladores projetados, foi considerado o sistema não linear com  $c_1 = c_2 = 1$  e  $d_k = \text{round}(3 + 2 \cos(k))$ . Além disso, para esse sistema não linear em malha fechada as condições iniciais atrasadas foram consideradas nulas, ou seja, em  $\varphi_{5,0} = \{\phi_{5,0}, x_0\} \in E_\varphi$ ,  $\phi_{5,0} \in E_\phi$  e  $x_0 \in E_0$  com  $[\phi_{5,0}]_j = [0 \ 0]^T$ , para  $j \in \mathcal{I}[1, 5]$ , resultando em  $\Upsilon_\varphi = \mathcal{C}_x = \mathcal{L}_{V_1}$  e  $\mathcal{B}_\phi = \{0\}$ . Diante disso, determinou-se um *grid* de condição iniciais atuais,  $x_0$ , pertencentes à região de validade para testar cada controlador projetado. Assim, na Figura 4 são apresentadas condições iniciais do sistema não linear em malha fechada que geraram trajetórias divergentes, em que as condições iniciais marcadas por  $\times$  geraram trajetórias divergentes para o sistema não linear em malha fechada com o controlador projetado via o problema de otimização (3.54), e as condições iniciais marcadas por  $\square$  geraram trajetórias divergentes para o sistema não linear em malha fechada com o controlador projetado a partir das condições de (GAO; LIU; LAM, 2009). Nessa figura também são apresentadas as regiões de validade e de estabilidade assintótica estimada. Note que o número de condições iniciais que geram trajetórias instáveis para esse último sistema não linear em malha fechada considerado é aproximadamente 22% maior que o número de condições iniciais do sistema realimentado pelo controlador projetado via (3.54) que geram trajetórias instáveis.

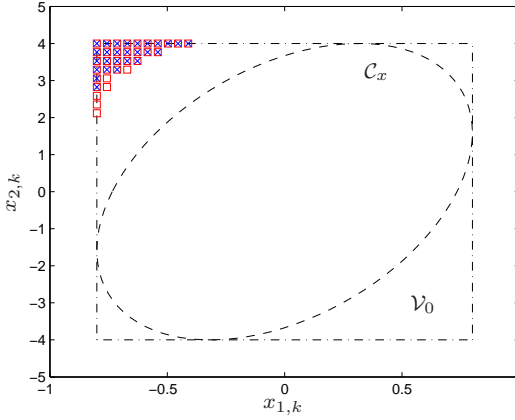


Figura 4 – Conjuntos  $\mathcal{C}_x = \mathcal{L}_{V_1}$  (linha pontilhada) e  $\mathcal{V}_0$  e condições iniciais que geram trajetórias divergentes.

#### 3.4.1.2 Sistema com motivação prática

Considere o sistema não linear discreto no tempo com atraso nos estados (2.27), tratado no Exemplo 2.2.1 e cujo modelo fuzzy T-S, já apresentado nesse mesmo exemplo do Capítulo 2, tem a região de validade, (3.6), representada por:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \eta = 0.05. \quad (3.67)$$

A partir da solução do problema de otimização (3.54), obtêm-se os seguintes ganhos para a lei de controle (3.7):

$$\begin{aligned} K_1 &= - \begin{bmatrix} 14.6071 & 10.0789 \end{bmatrix}, K_{d1} = \begin{bmatrix} 0 & -4.3207 \end{bmatrix}, \\ K_2 &= - \begin{bmatrix} 13.9966 & 10 \end{bmatrix}, K_{d2} = - \begin{bmatrix} 0.0001 & 4.3410 \end{bmatrix}, \\ K_3 &= - \begin{bmatrix} 20.6985 & 14.5675 \end{bmatrix}, K_{d3} = \begin{bmatrix} 0 & -6.2346 \end{bmatrix}, \\ K_4 &= - \begin{bmatrix} 20.0458 & 14.5806 \end{bmatrix}, K_{d4} = \begin{bmatrix} 0 & -6.2349 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

A partir de (3.24) e (3.25), tem-se  $\rho = 5.9552$  e  $r \leq \rho^{-1/2} = 0.4098$ .

Considerando que as condições iniciais atrasadas são nulas, ou seja, em  $\varphi_{5,0} = \{\phi_{5,0}, x_0\} \in E_\varphi$ ,  $\phi_{5,0} \in E_\phi$  e  $x_0 \in E_0$  com  $[\phi_{5,0}]_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ , para  $j \in \mathcal{I}[1, 5]$ , resultando em  $\Upsilon_\varphi = \mathcal{C}_x = \mathcal{L}_{V_1}$  e  $\mathcal{B}_\phi = \{0\}$ . Diante disso, na Figura 5 são apresentadas a região de validade  $\mathcal{V}_0$  e a

região de estabilidade  $\Upsilon_\varphi = \mathcal{C}_x = \mathcal{L}_{V_1}$ . Nessa mesma figura ainda são mostradas sete trajetórias estáveis geradas a partir de condições iniciais localizadas no interior da região de estabilidade, sendo que todas essas condições iniciais estáveis estão representadas por  $\times$ , e uma trajetória que converge para um ponto de equilíbrio diferente da origem (TARBOURIECH et al., 2011) com condição inicial marcada por  $\circ$  que não pertence à região de estabilidade estimada. Essas trajetórias foram geradas a partir da simulação do sistema não linear discreto no tempo com atraso nos estados (2.27) em malha fechada por meio da lei de controle (3.7)–(3.8), sendo os ganhos dados por (3.68), e a função de pertinência dada por (2.29). Além disso, nessa simulação considerou-se o atraso variante no tempo como  $d_k = 3 - \text{round}(2 \cos(0.2k))$ ,  $|x_{1,k}| \leq 0.05$ ; e se  $|x_{1,k}| = 0.05$ , então  $x_{2,k} = 0$  devido às limitações físicas do sistema. Como esperado, todas as trajetórias iniciadas a partir de condições

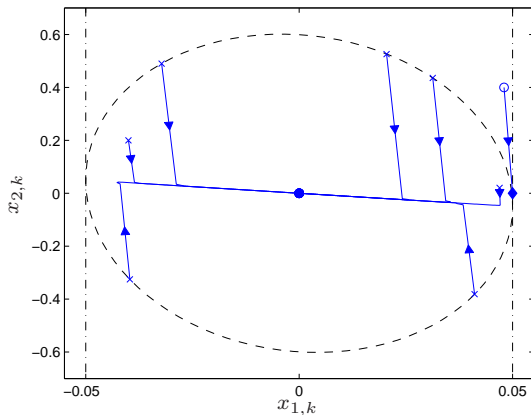


Figura 5 – Conjunto  $\mathcal{C}_x = \mathcal{L}_{V_1}$  (linha pontilhada), sete trajetórias que convergem para origem e uma trajetória converge para um ponto de equilíbrio diferente da origem.

iniciais localizadas no interior da região de validade convergem assintoticamente para a origem.

Adicionalmente, geraram-se ganhos para a lei de controle (3.7)–(3.8) a partir das condições propostas em (GAO; LIU; LAM, 2009, Teorema 2) e (WU et al., 2011b, Teorema 4), considerando para ambos os casos  $\epsilon = 5$ . Com isso, obteve-se para o primeiro caso os seguintes

ganhos:

$$\begin{aligned} K_1 &= - \begin{bmatrix} 0.7448 & 4.2249 \end{bmatrix}, K_{d1} = \begin{bmatrix} 0.0062 & -4.3597 \end{bmatrix}, \\ K_2 &= - \begin{bmatrix} 0.1596 & 4.2256 \end{bmatrix}, K_{d2} = \begin{bmatrix} 0.0062 & -4.3597 \end{bmatrix}, \\ K_3 &= - \begin{bmatrix} 0.9607 & 5.9174 \end{bmatrix}, K_{d3} = \begin{bmatrix} 0.0094 & -6.1624 \end{bmatrix}, \\ K_4 &= - \begin{bmatrix} 0.3149 & 5.917 \end{bmatrix}, K_{d4} = \begin{bmatrix} 0.0089 & -6.1625 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Para o segundo caso, obteve-se os seguintes ganhos:

$$\begin{aligned} K_1 &= - \begin{bmatrix} 3.6934 & 2.2242 \end{bmatrix}, K_{d1} = - \begin{bmatrix} 0.0034 & 4.3704 \end{bmatrix}, \\ K_2 &= - \begin{bmatrix} 3.1061 & 2.2315 \end{bmatrix}, K_{d2} = - \begin{bmatrix} 0.0036 & 4.3705 \end{bmatrix}, \\ K_3 &= - \begin{bmatrix} 5.1629 & 3.164 \end{bmatrix}, K_{d3} = - \begin{bmatrix} 0.0068 & 6.2210 \end{bmatrix}, \\ K_4 &= - \begin{bmatrix} 4.5011 & 3.1542 \end{bmatrix}, K_{d4} = - \begin{bmatrix} 0.0064 & 6.2190 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Ambos os controladores gerados foram testados no sistema não linear nas mesmas condições utilizadas nas simulações realizadas para gerar as trajetórias mencionadas no parágrafo anterior. Sendo assim, foi obtida a trajetória apresentada na Figura 6 que foi gerada utilizando o controlador sintetizado a partir de (GAO; LIU; LAM, 2009, Teorema 2) com  $x_0 = [0.04927 \ 0.05246]$ . Já a trajetória apresentada na Figura

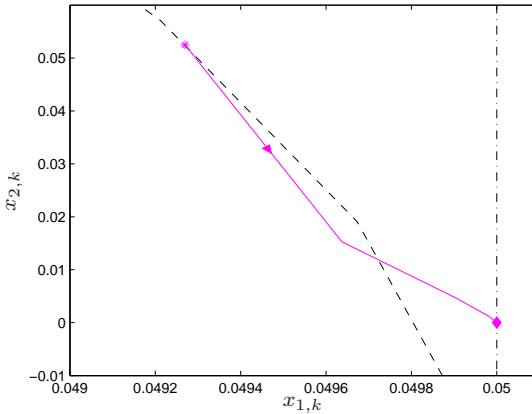


Figura 6 – Trajetória convergente para um ponto de equilíbrio diferente da origem.

7 foi obtida a partir de controlador gerado pela condição (WU et al., 2011b, Teorema 4) com  $x_0 = [-0.04885 \ -0.07903]$ . Note que mesmo as duas condições iniciais localizadas no interior da região de estabili-

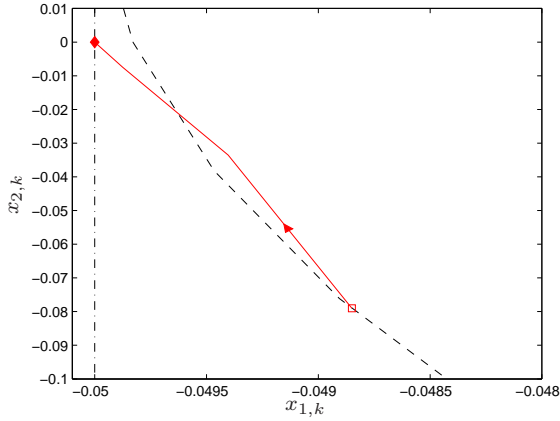


Figura 7 – Trajetória convergente para um ponto de equilíbrio diferente da origem.

dade estimada a partir das condições desenvolvidas neste capítulo, as trajetórias resultantes dessas condições iniciais não convergem para a origem, convergindo assim para pontos de equilíbrio que são diferentes da origem do sistema controlado. Tendo o conhecimento de que os resultados propostos por (GAO; LIU; LAM, 2009) e (WU et al., 2011b) não levam em consideração a validade local do modelo fuzzy T-S, as trajetórias apresentadas nas figuras 6 e 7 mostram que esses resultados não são adequados para serem aplicados no sistema não linear que originou o modelo fuzzy T-S.

### 3.4.2 Estabilização local $\ell_2$

Considere o mesmo sistema com motivação prática utilizado para a estabilização local, porém considerando neste momento que ele é afetado por um sinal de perturbação  $\omega_k$  limitado em energia e que as

condições iniciais sejam todas nulas. Com isso, tem-se

$$\begin{aligned}
 x_{1,k+1} &= x_{1,k} + cTx_{2,k} + (1-c)Tx_{2,k-d_k}, \\
 x_{2,k+1} &= \frac{Tg\mu(\mu x_{1,k} + 2\mu y_0 + 2)x_{1,k}}{(1 + \mu(x_{1,k} + y_0))^2} x_{1,k} + c \left(1 - \frac{TK_m}{m}\right) x_{2,k} \\
 &\quad + (1-c) \left(1 - \frac{TK_m}{m}\right) x_{2,k-d_k} \\
 &\quad + \frac{T\lambda\mu}{2m(1 + \mu(x_{1,k} + y_0))^2} u_k + \omega_k.
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

O modelo fuzzy T-S que representa esse sistema não linear é basicamente o mesmo apresentado no Exemplo 2.2.1 do Capítulo 2, sendo acrescentado nesse as matrizes  $B_{\omega i} = [0 \quad 1]^T$ , para  $i \in \mathcal{I}[1, 4]$ .

#### 3.4.2.1 Perturbação admissível

Primeiramente, computa-se o controlador que minimiza  $\delta$  utilizando o problema de otimização (3.61). Sendo assim, os ganhos do controlador obtidos resolvendo  $\mathcal{P}_{tol}$  são:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= - \begin{bmatrix} 968.2126 & 16.7969 \end{bmatrix}, K_{d1} = \begin{bmatrix} 0 & -7.1622 \end{bmatrix}, \\
 K_2 &= - \begin{bmatrix} 967.5732 & 16.7966 \end{bmatrix}, K_{d2} = \begin{bmatrix} 0 & -7.1623 \end{bmatrix}, \\
 K_3 &= - \begin{bmatrix} 1384.3 & 24.1034 \end{bmatrix}, K_{d3} = \begin{bmatrix} 0 & -10.3435 \end{bmatrix}, \\
 K_4 &= - \begin{bmatrix} 1383.7 & 24.1034 \end{bmatrix} \text{ e } K_{d4} = \begin{bmatrix} 0 & -10.3435 \end{bmatrix};
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

obtendo-se  $\delta = 0.088$ . Nesse caso, o sistema não linear (3.71) em malha fechada com a lei de controle fuzzy (3.7)–(3.8) utilizando os ganhos (3.72) é ISS no sentido  $\ell_2$  para qualquer sinal de perturbação com

energia limitada por  $\delta^{-1}$ , ou seja,  $\sum_{k=0}^{\infty} \omega_k^T \omega_k \leq 11.3681$  e, portanto, as trajetórias dos estados resultantes nunca evoluem fora de  $\mathcal{L}_{V_1}(\delta^{-1}) \subset \mathcal{V}_0$ .

Para verificar o que foi dito no parágrafo anterior, aplicam-se sinais de perturbações de energia limitada no sistema não linear (3.71) em malha fechada para ilustrar o comportamento de suas respostas. Note que todos os sinais de perturbação têm energia igual a 11.3681. As trajetórias dos estados resultantes estão mostradas na Figura 8. Nesse caso, considera-se o atraso variante no tempo como  $d_k = \text{round}(3 + 2 \cos(k))$  e, antes da ação da perturbação, o sistema não linear em malha fechada está relaxado, ou seja,  $[\varphi_{5,k}]_j = \mathbf{0}$ , para  $j \in \mathcal{I}[1, 6]$ .



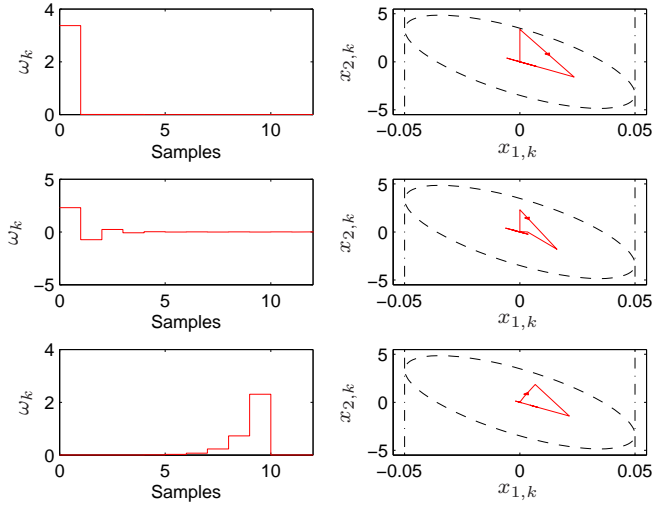


Figura 8 – Sinais de perturbação e trajetórias dos estados.

Observe que todas as trajetórias dos estados permanecem no interior do conjunto  $\mathcal{L}_{V_1}(\delta^{-1})$  e elas convergem assintoticamente para origem quando  $\omega_k = 0$ , satisfazendo as características de um sistema não linear em malha fechada ISS.

Utilizando os resultados propostos em (WU et al., 2011b), com  $\epsilon = 10$ , obtêm-se os seguintes ganhos para o controlador:

$$\begin{aligned} K_1 &= -[4.1531 \quad 2.2761], K_{d1} = -[0.0156 \quad 4.3907], \\ K_2 &= -[3.3024 \quad 1.8191], K_{d2} = -[0.0093 \quad -4.3855], \\ K_3 &= -[5.9426 \quad 3.4567], K_{d3} = -[0.0257 \quad 6.2509], \\ K_4 &= -[4.9705 \quad 2.9035] \text{ e } K_{d4} = -[0.0243 \quad 6.2535]. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Aplicando a lei de controle (3.7)–(3.8) com esses ganhos no sistema não linear (3.71), considerando o primeiro sinal de distúrbio mostrado na Figura 8,  $d_k = \text{round}(3 + 2 \cos(k))$  e  $[\varphi_{5,k}]_j = \mathbf{0}$ , para  $j \in \mathcal{I}[1, 6]$ , chega-se à Figura 9. Note que o sistema em malha fechada resultante a partir do controlador sintetizado pelas condições propostas por (WU et al., 2011b) não é ISS. Portanto, mostra-se a importância de se tratar sinais de perturbações de energia finita quando trabalha-se com representação locais, ou seja, trabalha-se com resultados que são válidos somente em

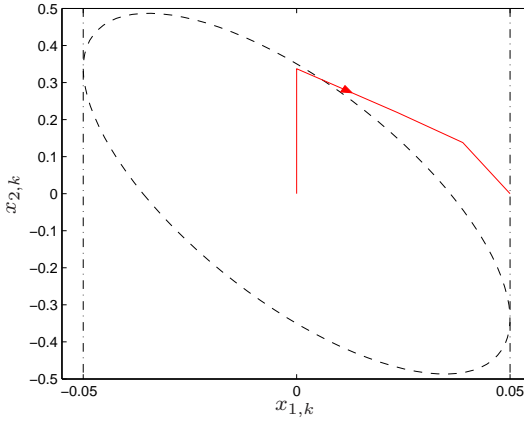


Figura 9 – Trajetória estado não ISS.

Tabela 1 – Comparação de tamanhos de  $\mathcal{L}_{V_1}(\delta^{-1})$  para diferentes valores de  $\delta$ .

$\delta$	2	4	6	8	10	11.363
$\mathcal{P}_{att1}$	0.0968	0.1936	0.2903	0.3871	0.4839	0.5499
$\mathcal{P}_{att2}$	0.224	0.3179	0.3905	0.4525	0.5086	0.5488

uma região compacta do espaço de estados.

#### 3.4.2.2 Atenuação de perturbação

Neste momento, avalia-se a minimização do efeito da perturbação nos estados quando o nível de energia dessa perturbação é conhecido, ou seja,  $\delta$  é conhecido. Para solucionar esse problema, utilizam-se os problemas de otimização (3.63) e (3.66). Diante disso, considera-se  $\delta \in \mathcal{I}[2, 11.363]$  e, por meio desses problemas de otimização, calculam-se ganhos para o controlador fuzzy (3.7)–(3.8) que minimizam o efeito das perturbações nos estados. Para analisar os resultados obtidos, estimam-se os tamanhos dos conjuntos  $\mathcal{L}_{V_1}(\delta^{-1})$ , por meio do cálculo da área de cada conjunto relativo a cada valor de nível de energia do sinal de perturbação. A partir dos valores obtidos, montou-se a Tabela 1.

Observando os resultados apresentados na Tabela 1, pode-se verificar que para o sistema não linear em questão o problema de otimização

$\mathcal{P}_{att1}$  produz resultados melhores para  $\delta < 11.363$ , ou seja, para esses valores de  $\delta$  os tamanhos dos conjuntos  $\mathcal{L}_{V_1}(\delta^{-1})$  são menores que utilizando o problema de otimização  $\mathcal{P}_{att2}$ . Porém, para  $\delta = 11.363$  esse apresenta o tamanho da região  $\mathcal{L}_{V_1}(\delta^{-1})$  menor que a obtida via  $\mathcal{P}_{att1}$ . Vale destacar que a região  $\mathcal{L}_{V_1}(\delta^{-1})$  obtida quando resolve-se o problema de otimização (3.61) apresenta o valor do tamanho de  $\mathcal{L}_{V_1}(\delta^{-1})$  igual a 0.5501 e, portanto, quando compara-se esse valor com os valores apresentados na Tabela 1, tem-se que os problemas de otimização (3.63) e (3.66) minimizaram o efeito da perturbação nos estados.

### 3.5 CONCLUSÕES

Neste capítulo, dois resultados principais foram apresentados, ambos projetam controladores fuzzy para serem aplicados em sistemas não lineares discretos no tempo com atraso nos estados. Sendo que um deles garante a estabilização local de sistemas não lineares em malha fechada quando as condições iniciais estão confinadas na região de estabilidade estimada. Já o outro garante a estabilização local  $\ell_2$  do sistema não linear em malha fechada quando esse é afetado por uma perturbação  $\ell_2$  e suas condições iniciais são nulas, ou seja, garante-se que o sistema não linear em malha fechada seja ISS. Em ambos os casos o modelo fuzzy T-S representa de forma exata o sistema não linear no interior da região de validade. As condições propostas que compõem os resultados principais foram baseadas em uma candidata à função fuzzy de Lyapunov-Krasovskii.

Considerando o caso da estabilização local, foi utilizada uma metodologia para caracterizar a região de estabilidade semelhante àquela proposta no Capítulo 2, em que separa-se o vetor de condições iniciais em duas partes: uma contém as condições iniciais em  $k = 0$ , e a outra representa as condições iniciais atrasadas. Dessa forma, a caracterização da região de estabilidade é feita a partir desses dois conjuntos. Além disso, foi proposto um problema de otimização convexa para maximizar o tamanho dessa região de estabilidade estimada.

Para a estabilização local  $\ell_2$ , o cálculo da região positivamente invariante foi proposto por meio de um conjunto elipsoidal. Para a solução ótima das condições convexas, foram sugeridos três problemas de otimização: um maximiza o nível de energia da perturbação permitida a afetar o sistema não linear em malha fechada; e os outros dois minimizam o efeito da perturbação nos estados do sistema não linear em malha fechada. Por fim, foram apresentados exemplos numéricos

para ilustrar os resultados propostos, sendo que comparações com resultados encontrados na literatura de fuzzy foram feitas de forma a validar as condições aqui desenvolvidas.

## 4 ESTABILIZAÇÃO LOCAL VIA REALIMENTAÇÃO DO VETOR DE ESTADOS ATUAL E COM ATRASO MÁXIMO

Neste capítulo, são propostas condições convexas para a estabilização de sistemas não lineares discretos no tempo com atraso variante nos estados via realimentação dos estados atuais e com atraso máximo,  $x_k$  e  $x_{k-\bar{d}}$ , respectivamente. As condições são baseadas em uma candidata à função fuzzy de Lyapunov-Krasovskii e são representadas em termos de desigualdades matriciais lineares. Essas condições são válidas para uma classe de sistemas não lineares que podem ser exatamente representados por modelos fuzzy T-S sendo que essa representação exata é válida somente no interior da região de validade. Por esse motivo, regiões de estabilidade são estimadas tais que as trajetórias iniciadas a partir dessas regiões convergem assintoticamente para a origem.

Destaca-se que a metodologia utilizada para estimar as regiões de estabilidade segue a mesma idéia já exposta em capítulos anteriores, em que calculam-se dois conjuntos: um para tratar o vetor dos estados atuais, e o outro para lidar com os vetores de estados atrasados. Contudo, a candidata à função fuzzy L-K deste capítulo e as dos anteriores são diferentes entre si e, dessa forma, existem diferenças nas caracterizações das regiões de estabilidades propostas.

Vale ressaltar que neste capítulo não se tem acesso ao atraso variante no tempo, diferentemente do que é suposto no capítulo anterior. Diante disso, apresentam-se condições em que sintetizam-se ganhos para leis de controle que realimentam o vetor dos estados atuais,  $x_k$ , e o vetor dos estados mais atrasados,  $x_{k-\bar{d}}$ , e, assim, estabilizam-se localmente sistemas não lineares em malha fechada. Além disso, propõe-se um problema de otimização convexa para calcular os controladores fuzzy que maximizam as regiões de estabilidade estimadas dos sistemas não lineares em malha fechada. Finalmente, são apresentados dois exemplos em que demonstra-se a eficiência das condições desenvolvidas e são apresentados também resultados de comparações entre condições propostas na literatura e as condições desenvolvidas. Ainda com relação aos resultados aqui propostos, condições preliminares a esses são encontradas em (SILVA et al., 2014b) e no artigo que está submetido a um periódico internacional.

#### 4.1 COLOCAÇÃO DO PROBLEMA

Os sistemas não lineares discretos no tempo com atraso variante nos estados tratados neste capítulo são representados por:

$$x_{k+1} = f(x_k)x_k + f_d(x_k)x_{k-d_k} + g(x_k)u_k, \quad (4.1)$$

em que  $x_k \in E_x \subseteq \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u_k \in E_u \subseteq \mathbb{R}^m$  é o vetor de entrada de controle com  $m$  sinais de entrada e  $d_k \in \mathbb{N}^*$  denota o atraso variante no tempo que verifica  $1 \leq d_k \leq \bar{d}$ , em que  $\bar{d}$  é o limite superior do atraso. As funções  $f(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $f_d(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $g(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  são contínuas e limitadas para todo  $x_k \in E_x$ . As condições iniciais são dadas pela sequência  $\varphi_{\bar{d},0} \in E_\varphi$ , sendo  $\bar{d}$  um inteiro positivo conhecido tal que  $d_k \leq \bar{d} \forall k$ .

Como já apresentado em capítulos anteriores, os sistemas não lineares discretos no tempo com atraso variante nos estados (4.1) podem ser exatamente representados por modelos fuzzy T-S com  $N = 2^p$  regras dadas por

$$\begin{array}{ll} \text{Regra } i : & \text{SE } z_{1,k} \text{ é } M_{i1} \text{ e } \cdots \text{ e } z_{p,k} \text{ é } M_{ip}, \\ & \text{ENTÃO } x_{k+1} = A_i x_k + A_{di} x_{k-d_k} + B_i u_k, \end{array} \quad (4.2)$$

O processo de defuzzificação do modelo (4.2) pode ser representado como (TANAKA; WANG, 2001)

$$x_{k+1} = A(\alpha_k)x_k + A_d(\alpha_k)x_{k-d_k} + B(\alpha_k)u_k, \quad (4.3)$$

sendo que  $\alpha_k \in \Xi$  é função dos estados que estão acessíveis em tempo real e  $\Xi$  é dado por:

$$\Xi = \left\{ \alpha_k \in \mathbb{R}^N; \sum_{i=1}^N \alpha_{k(i)} = 1, \alpha_{k(i)} \geq 0, i \in \mathcal{I}[1, N] \right\}. \quad (4.4)$$

Diante disso, as matrizes em (4.3) podem ser reescritas como:

$$\begin{bmatrix} A(\alpha_k) & A_d(\alpha_k) & B(\alpha_k) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \alpha_{k(i)} \begin{bmatrix} A_i & A_{di} & B_i \end{bmatrix}, \alpha_k \in \Xi. \quad (4.5)$$

O modelo fuzzy T-S (4.2)–(4.5) representa de forma exata o sistema não linear (4.1) somente no interior da região de validade, como

já discutido no Capítulo 2. A região de validade,  $\mathcal{V}_0$ , é dada por:

$$\mathcal{V}_0 = \{x_k \in \mathbb{R}^n; |L_{(i)}x_k| \leq \eta_{(i)}\} \subseteq E_x, \quad (4.6)$$

em que  $\eta_{(i)} > 0$ ,  $L_{(i)} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ,  $i \in \mathcal{I}[1, \kappa]$ , e  $\kappa$  representando o número de restrições que caracteriza a região permitida no espaço de estados para o sistema em malha fechada.

Utilizando a compensação paralela distribuída, propõe-se uma lei de controle fuzzy para realimentar o sistema não linear (4.1) como:

$$u_k = K(\alpha_k)x_k + K_{\bar{d}}(\alpha_k)x_{k-\bar{d}}. \quad (4.7)$$

Diferentemente da lei de controle utilizada no capítulo anterior, a lei proposta aqui não requer que o valor de  $d_k$  seja mensurável ou estimável em tempo real. Sendo as matrizes do controlador dependentes da função de pertinência, elas são então definidas como se segue:

$$\begin{bmatrix} K(\alpha_k) & K_{\bar{d}}(\alpha_k) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \alpha_{k(i)} \begin{bmatrix} K_i & K_{\bar{d}i} \end{bmatrix}, \quad \alpha_k \in \Xi, \quad (4.8)$$

em que  $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $K_{\bar{d}i} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Portanto, substituindo (4.7) em (4.3), obtém-se o seguinte modelo fuzzy T-S em malha fechada

$$\begin{aligned} x_{k+1} = & (A(\alpha_k) + B(\alpha_k)K(\alpha_k))x_k + A_d(\alpha_k)x_{k-d_k} \\ & + B(\alpha_k)K_{\bar{d}}(\alpha_k)x_{k-\bar{d}}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Note que, da mesma forma que acontece com o modelo fuzzy T-S (4.3)–(4.5), sempre que as trajetórias dos estados do modelo fuzzy T-S em malha fechada (4.9) pertencerem a  $\mathcal{V}_0$  e, em consequência,  $\alpha_k \in \Xi$ , esse modelo representa exatamente o sistema não linear (4.1) em malha fechada a partir da lei de controle (4.7)–(4.8).

Portanto, o interesse neste momento é caracterizar a região de estabilidade  $\Upsilon_\varphi$ , tal que as trajetórias do sistema não linear (4.1) com a lei de controle (4.7)–(4.8) e condições iniciais dadas pela sequência  $\varphi_{\bar{d},0}$  com elementos  $[\varphi_{\bar{d},0}]_j$ ,  $j \in \mathcal{I}[1, \bar{d} + 1]$ , e localizadas no interior de  $\Upsilon_\varphi$ , permaneçam confinadas em  $\mathcal{V}_0$ . Diante disso, a seguir apresenta-se o principal problema tratado neste capítulo.

**Problema 4.1** *Determinar os ganhos fuzzy  $K_i$  e  $K_{\bar{d}i}$ , para  $i \in \mathcal{I}[1, N]$ , do controlador (4.7)–(4.8) e caracterizar a região de estabilidade  $\Upsilon_\varphi$  tal que as trajetórias do sistema em malha fechada (4.1) com (4.7)–(4.8) permaneçam confinadas em  $\mathcal{V}_0$  e converjam assintoticamente para a*

origem sempre que as condições iniciais forem dadas pela sequência  $\varphi_{\bar{d},0}$  com elementos  $[\varphi_{\bar{d},0}]_j \in \Upsilon_\varphi$ ,  $j \in \mathcal{I}[1, \bar{d} + 1]$ .

## 4.2 RESULTADOS PRELIMINARES

Inspirado por (WU et al., 2013), reescreve-se o modelo fuzzy (4.3) com a ajuda da variável instrumental  $w_{d_k} = x_{k-d_k} - x_{k-\bar{d}}$ , resultando em:

$$x_{k+1} = A(\alpha_k)x_k + A_d(\alpha_k)x_{k-\bar{d}} + A_d(\alpha_k)w_{d_k} + B(\alpha_k)u_k. \quad (4.10)$$

Utilizando a lei de controle (4.7), tem-se que o sistema em malha fechada dado por (4.9) pode ser reescrito de forma equivalente como:

$$x_{k+1} = \hat{A}(\alpha_k)x_k + \hat{A}_d(\alpha_k)x_{k-\bar{d}} + A_d(\alpha_k)w_{d_k}, \quad (4.11)$$

em que as matrizes  $\hat{A}(\alpha_k)$  e  $\hat{A}_d(\alpha_k)$  são

$$\hat{A}(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^N \mu_{ij} \alpha_{k(i)} \alpha_{k(j)} \frac{A_i + B_i K_j + A_j + B_j K_i}{2}, \quad (4.12)$$

$$\hat{A}_d(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^N \mu_{ij} \alpha_{k(i)} \alpha_{k(j)} \frac{A_{di} + B_i K_{\bar{d}j} + A_{dj} + B_j K_{\bar{d}i}}{2}, \quad (4.13)$$

com

$$\mu_{ij} = 2 \text{ se } i \neq j, \text{ ou } \mu_{ij} = 1 \text{ se } i = j. \quad (4.14)$$

Considere a candidata à função fuzzy L-K,  $V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k) : E_\varphi \times \Xi \mapsto \mathbb{R}^+$ :

$$\begin{aligned} V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k) &= x_k^T Q^{-1}(\alpha_k) x_k + \sum_{j=k-d_k}^{k-1} x_j^T S(\alpha_j) x_j \\ &\quad + \sum_{\ell=1-\bar{d}}^0 \sum_{j=k+\ell}^{k-1} x_j^T S(\alpha_j) x_j + \sum_{j=k-\bar{d}}^{k-1} x_j^T R_1 x_j, \end{aligned} \quad (4.15)$$

com  $Q(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \alpha_{k(i)} Q_i$  e  $S(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \alpha_{k(i)} S_i$ . Essa candidata à função fuzzy L-K é utilizada para formular condições de síntese na tentativa de encontrar soluções para o problema 4.1. Note que ela difere



da candidata à função L-K utilizada no capítulo anterior por conter mais um termo de somatório, referente a  $R_1$ , e por conter somente a matriz  $Q(\alpha_k)$  com expoente  $-1$ .

Novamente, segundo (FRIDMAN, 2014; STOJANOVIĆ; DEBELJKOVIĆ; MLADENOVIĆ, 2007), a função  $V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k) > 0$  em (4.15) é dita ser uma função L-K se

$$\Delta V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k) = V(\varphi_{\bar{d},k+1}, \alpha_{k+1}) - V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k) < 0. \quad (4.16)$$

Então, a estabilidade assintótica do modelo fuzzy (4.9) para  $K(\alpha_k)$  e  $K_{\bar{d}}(\alpha_k)$  dados e  $\alpha_k \in \Xi$  é suficiente quando a desigualdade (4.16) é verificada.

Neste capítulo, a caracterização da região de estabilidade  $\Upsilon_\varphi$  é a mesma apresentada na Definição 3.2 no Capítulo 3. Observe que na caracterização de  $\Upsilon_\varphi$ , o conjunto  $\mathcal{C}_x$  descreve a região permitida para valores do vetor de estado atual enquanto o conjunto  $\mathcal{B}_\phi$  define a região para os elementos  $[\phi_{\bar{d},0}]_j \in E_j$ , para  $j \in \mathcal{I}[1, \bar{d}]$ . Portanto, seguindo o Lema 3.1, apresentado no Capítulo 3, tem-se um resultado utilizado no cálculo do conjunto  $\mathcal{C}_x$ . A partir desse resultado, é possível calcular um conjunto de nível associado ao termo  $V_1(x_k, \alpha_k)$  da candidata à função L-K (4.15) que é dado pela intersecção dos conjuntos elipsoidais relativos às matrizes  $Q_i^T = Q_i > \mathbf{0}$ , para  $i \in \mathcal{I}[1, N]$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{V_1}(c) &= \{\mathcal{E}(Q_i^{-1}, c), \forall \alpha_k \in \Xi\} = \bigcap_{\alpha_k \in \Xi} \mathcal{E}(Q^{-1}(\alpha_k), c) = \\ &\bigcap_{i \in \mathcal{I}[1, N]} \mathcal{E}(Q_i^{-1}, c) \subseteq \mathcal{V}_0, \end{aligned} \quad (4.17)$$

em que  $c$  é um escalar positivo e  $\mathcal{E}(Q_i^{-1}, c)$ , para  $i \in \mathcal{I}[1, N]$ , denota os conjuntos elipsoidais definidos como se segue:

$$\mathcal{E}(Q_i^{-1}, c) = \{x_k \in \mathbb{R}^n; x_k^T Q_i^{-1} x_k \leq c\}. \quad (4.18)$$

As equações (4.17)–(4.18) são utilizadas para caracterizar conjuntos, tais que as trajetórias do sistema correspondentes permanecem confinadas quando essas iniciam a partir de  $\Upsilon_\varphi$ . No caso em que  $c = 1$ , utilizam-se as notações simplificadas  $\mathcal{L}_{V_1} = \mathcal{L}_{V_1}(1)$  e  $\mathcal{E}(Q_i^{-1}) = \mathcal{E}(Q_i^{-1}, 1)$ . A partir dos resultados apresentados no lema a seguir, é possível caracterizar os conjuntos  $\mathcal{C}_x$  e  $\mathcal{B}_\phi$ , e, por consequência,  $\Upsilon_\varphi$ .

**Lema 4.1** *Se  $V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k)$  definida em (4.15) é uma função L-K fuzzy para o modelo fuzzy em malha fechada (4.9) e  $\mathcal{L}_{V_1} \subseteq \mathcal{V}_0$ , então a região*

$\Upsilon_\varphi$  definida por

$$\mathcal{C}_x = \{x_0 \in \mathbb{R}^n; V_1(x_0, \alpha_0) \leq 1 - \rho \|\phi_{\bar{d},0}\|_{\bar{d}}^2\} \subseteq \mathcal{V}_0, \quad (4.19)$$

com

$$\rho = \max_{i \in \mathcal{I}[1,N]} (\lambda_{\max}(S_i)) \left( \frac{\bar{d}^2 - \bar{d} + 2}{2} \right) + \lambda_{\max}(R)\bar{d}. \quad (4.20)$$

e  $r$  em (3.17) verificando

$$0 \leq r \leq \rho^{-\frac{1}{2}} \quad (4.21)$$

é uma região de estabilidade assintótica para o modelo fuzzy em malha fechada considerado.

*Prova:* A prova da caracterização do conjunto  $\mathcal{C}_x$  está apresentada no Lema 3.3. Considerando os três somatórios do lado direito da igualdade da função fuzzy L-K que tratam o atraso, tem-se que a variável  $\rho$  deve satisfazer:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=-d_k}^{-1} [\phi_{\bar{d},0}]_{\bar{d}+1+j}^T S(\alpha_j) [\phi_{\bar{d},0}]_{\bar{d}+1+j} + \sum_{\ell=1-\bar{d}}^{-1} \sum_{j=\ell}^{-1} [\phi_{\bar{d},0}]_{\bar{d}+1+j}^T S(\alpha_j) \\ & \times [\phi_{\bar{d},0}]_{\bar{d}+1+j} + \sum_{j=-\bar{d}}^{-1} [\phi_{\bar{d},0}]_{\bar{d}+1+j}^T R_1 [\phi_{\bar{d},0}]_{\bar{d}+1+j} \leq \rho \|\phi_{\bar{d},0}\|_{\bar{d}}^2. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Além disso, é necessário que  $0 \leq c \leq 1$  e isso é possível somente se, em (3.17),  $0 \leq r \leq \rho^{-\frac{1}{2}}$ . ■

Note que a diferença existente entre os lemas 3.3 e 4.1 é na forma de calcular a variável  $\rho$ .

A conexão entre os conjuntos  $\mathcal{C}_x$  e  $\mathcal{B}_\phi$  em termos do confinamento de trajetórias em  $\mathcal{L}_{V_1}$  e a prova da estabilidade local assintótica podem ser verificadas no Lema 3.4.

### 4.3 RESULTADO PRINCIPAL

No teorema apresentado na sequência, são apresentadas condições dependentes do atraso que, se factíveis, resolvem o problema 4.1 fornecendo ganhos fuzzy T-S para a lei de controle (4.7)–(4.8). Assim, a partir desses ganhos, estabiliza-se localmente o sistema não linear

discreto no tempo com atraso variante nos estados (4.1).

**Teorema 4.1** *Suponha que existam matrizes simétricas definidas positivas  $Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , para  $i \in \mathcal{I}[1, N]$ ,  $\tilde{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\tilde{R}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , e matrizes  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\tilde{X}_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , para  $j \in \mathcal{I}[1, 3]$ ,  $Y_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $Y_{\bar{d}i} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , satisfazendo,  $\forall i, p, q \in \mathcal{I}[1, N]$ ,  $j \in \mathcal{I}[i, N]$  e  $\forall \ell \in \mathcal{I}[1, \kappa]$ :*

$$\begin{bmatrix}
 -H - H^T & 0.5(A_i U + B_i Y_j + A_j U + B_j Y_i) & \tilde{X}_1 \\
 \star & \begin{pmatrix} 0.5(Q_i + Q_j) - U^T - U \\ +0.5\bar{d}(\tilde{S}_i + \tilde{S}_j) + \tilde{R}_1 \end{pmatrix} & \tilde{X}_2 \\
 \star & \star & -\tilde{S}_p + \tilde{R}_1 \\
 \star & \star & \star \\
 \star & \star & \star \\
 \star & \star & \star \\
 \begin{pmatrix} 0.5(A_{di}U + B_i Y_{\bar{d}j}) \\ +A_{dj}U + B_j Y_{\bar{d}i}) - \tilde{X}_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.5(A_{di} + A_{dj}) \\ \times U - \tilde{X}_1 \end{pmatrix} & H^T \\
 -\tilde{X}_2 & -\tilde{X}_2 & \mathbf{0} \\
 -\tilde{R}_1 + \tilde{X}_3^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
 -\tilde{X}_3 - \tilde{X}_3^T & -\tilde{X}_3^T & \mathbf{0} \\
 \star & -\tilde{R}_1 & \mathbf{0} \\
 \star & \star & -Q_q
 \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (4.23)$$

e

$$\begin{bmatrix} -Q_i & Q_i L_{(\ell)}^T \\ \star & -\eta_{(\ell)}^2 \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}. \quad (4.24)$$

Então, as matrizes do controlador (4.8) dadas por

$$K_i = Y_i U^{-1} \quad e \quad K_{\bar{d}i} = Y_{\bar{d}i} U^{-1} \quad (4.25)$$

são tais que a origem do sistema não linear (4.1) em malha fechada pela lei de controle (4.7)–(4.8) é assintoticamente estável para toda sequência de condições iniciais  $\varphi_{\bar{d},0}$ , com  $[\varphi_{\bar{d},0}]_j \in \Upsilon_\varphi$ ,  $j \in \mathcal{I}[1, \bar{d} + 1]$ , sendo os conjuntos  $\mathcal{C}_x$  e  $\mathcal{B}_\phi$  obtidos como mostrado no Lema 4.1, assegurando que as respectivas trajetórias permaneçam em  $\mathcal{L}_{V_1} \subseteq \mathcal{V}_0$ . Além disso, (4.15) é uma função fuzzy L-K com  $S_i = U^{-T} \tilde{S}_i U^{-1}$ ,  $i \in \mathcal{I}[1, N]$  e  $R_1 = U^{-T} \tilde{R}_1 U^{-1}$ .

*Prova:* Primeiramente, mostra-se que a solução factível de (4.23) assegura a estabilidade assintótica local do modelo fuzzy T-S (4.2)–(4.5) em malha fechada a partir da lei de controle (4.7)–(4.8) com os ganhos

do controlador dados por (4.8) e (4.25) sempre que as trajetórias dos estados evoluírem no interior do conjunto  $\mathcal{V}_0$ . Em adicional, se (4.24) é verificada, pode-se computar uma região de estabilidade  $\Upsilon_\varphi$  com  $\rho$  dado por (4.20) e escolhendo  $r$  como mostrado em (4.21). Então, as trajetórias de condições iniciais definidas no interior da região de estabilidade para o modelo fuzzy T-S (4.2)–(4.5) em malha fechada pela lei de controle (4.7)–(4.8) são estáveis e permanecem em  $\mathcal{L}_{V_1} \subseteq \mathcal{V}_0$ . Portanto, garante-se a estabilidade assintótica local do sistema não linear (4.1) em malha fechada por meio do controlador (4.7)–(4.8) com os ganhos dados por (4.25).

Se (4.23) é verificada considerando os requisitos definidos no Teorema (4.1), então tem-se assegurada a positividade de  $Q_i$ ,  $\tilde{S}_i$ ,  $i \in \mathcal{I}[1, N]$  e  $\tilde{R}_1$ , e, em consequência, a positividade de  $S_i$ ,  $i \in \mathcal{I}[1, N]$ , e  $R_1$ , resultando que  $V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k)$  verifique (4.15). Substituindo  $Y_i$  e  $Y_{\bar{d}i}$  por  $K_i U$  e  $K_{\bar{d}i} U$ , respectivamente, multiplicando a desigualdade resultante sucessivamente por  $\alpha_{k(i)}$ ,  $\alpha_{k(j)}$ ,  $\alpha_{k-d_k(p)}$  e  $\alpha_{k+1(q)}$ , e somando em  $i \in \mathcal{I}[1, N]$ ,  $j \in \mathcal{I}[i, N]$ ,  $q \in \mathcal{I}[1, N]$ ,  $p \in \mathcal{I}[1, N]$ , obtém-se

$$\tilde{\Pi}_k = \begin{bmatrix} -H - H^T & \hat{A}(\alpha_k)U & \tilde{X}_1 \\ \star & \begin{pmatrix} Q(\alpha_k) - U^T - U \\ + \bar{d}\tilde{S}(\alpha_k) + \tilde{R}_1 \end{pmatrix} & \tilde{X}_2 \\ \star & \star & -\tilde{S}(\alpha_k^-) + \tilde{R}_1 \\ \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \\ \hat{A}_d(\alpha_k)U - \tilde{X}_1 & A_d(\alpha_k)U - \tilde{X}_1 & H^T \\ -\tilde{X}_2 & -\tilde{X}_2 & \mathbf{0} \\ -\tilde{R}_1 + \tilde{X}_3^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\tilde{X}_3 - \tilde{X}_3^T & -\tilde{X}_3 & \mathbf{0} \\ \star & -\tilde{R}_1 & \mathbf{0} \\ \star & \star & -Q(\alpha_k^+) \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (4.26)$$

em que  $\hat{A}(\alpha_k)$  e  $\hat{A}_d(\alpha_k)$  são dados em (4.12) e (4.13), respectivamente,  $\alpha_k^- \equiv \alpha_{k-d_k}$  e  $\alpha_k^+ \equiv \alpha_{k+1}$ . Note que as matrizes  $A_d(\alpha_k)$  e  $Q(\alpha_k)$  podem ser escritas como

$$D(\alpha_k) = \left( \sum_{j=1}^N \alpha_j \right) D(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^N \mu_{ij} \alpha_{k(i)} \alpha_{k(j)} 0.5(D_i + D_j),$$

em que  $D$  pode ser substituído por  $A_d$  ou  $Q$ , com  $\mu_{ij}$  dado em (4.14).

Considerando que  $-M^T G^{-1} M \leq G - M^T - M$  (veja Apêndice A.4), pode-se aplicar essa desigualdade no bloco  $(2, 2)$  de  $\tilde{\Pi}_k$  para obter  $\tilde{\Theta}_k \leq \tilde{\Pi}_k$ , em que

$$\tilde{\Theta}_k = \begin{bmatrix} -H - H^T & \hat{A}(\alpha_k)U & \tilde{X}_1 \\ * & \begin{pmatrix} -U^T Q^{-1}(\alpha_k)U \\ +\tilde{d}\tilde{S}(\alpha_k) + \tilde{R}_1 \end{pmatrix} & \tilde{X}_2 \\ * & * & -\tilde{S}(\alpha_k^-) + \tilde{R}_1 \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ \hat{A}_d(\alpha_k)U - \tilde{X}_1 & A_d(\alpha_k)U - \tilde{X}_1 & H^T \\ -\tilde{X}_2 & -\tilde{X}_2 & \mathbf{0} \\ -\tilde{R}_1 + \tilde{X}_3^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\tilde{X}_3 - \tilde{X}_3^T & -\tilde{X}_3 & \mathbf{0} \\ * & -\tilde{R}_1 & \mathbf{0} \\ * & * & -Q(\alpha_k^+) \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (4.27)$$

Aplicando o complemento de Schur em (4.27), tem-se

$$\tilde{\Theta}_k = \begin{bmatrix} H^T Q^{-1}(\alpha_k^+)H - H - H^T & \hat{A}(\alpha_k)U \\ * & \begin{pmatrix} -U^T Q^{-1}(\alpha_k)U \\ +\tilde{d}\tilde{S}(\alpha_k) + \tilde{R}_1 \end{pmatrix} \\ * & * \\ * & * \\ * & * \\ \tilde{X}_1 & \hat{A}_d(\alpha_k)U - \tilde{X}_1 & A_d(\alpha_k)U - \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 & -\tilde{X}_2 & -\tilde{X}_2 \\ -\tilde{S}(\alpha_k^-) + \tilde{R}_1 & -\tilde{R}_1 + \tilde{X}_3^T & \mathbf{0} \\ * & -\tilde{X}_3 - \tilde{X}_3^T & -\tilde{X}_3 \\ * & * & -\tilde{R}_1 \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (4.28)$$

Então, considerando a regularidade de  $H$ ,  $U$ ,  $X_i = U^{-T} \tilde{X}_i U^{-1}$ , para  $i \in \mathcal{I}[1, 3]$ , e  $F = H^{-T}$ , e aplicando a transformada de congruência

$\Theta_k = \mathcal{T}^T \tilde{\Theta}_k \mathcal{T}$  com  $\mathcal{T} = \text{diag}\{H^{-1}, U^{-1}, U^{-1}, U^{-1}, U^{-1}\}$ , obtém-se

$$\Theta_k = \begin{bmatrix} Q^{-1}(\alpha_k^+) - F - F^T & F\hat{A}(\alpha_k) & & & \\ \star & -Q^{-1}(\alpha_k) + \bar{d}S(\alpha_k) + R_1 & & & \\ \star & & \star & & \\ \star & & \star & & \\ \star & & \star & & \\ X_1 & F\hat{A}_d(\alpha_k) - X_1 & FA_d(\alpha_k) - X_1 & & \\ X_2 & -X_2 & -X_2 & & \\ -S(\alpha_k^-) + R_1 & -R_1 + X_3^T & \mathbf{0} & & \\ \star & -X_3 - X_3^T & -X_3 & & \\ \star & \star & -R_1 & & \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (4.29)$$

Considerando que  $\xi_k = [x_{k+1}^T \quad x_k^T \quad x_{k-d_k}^T \quad x_{k-\bar{d}}^T \quad w_{dk}^T]^T$ , tem-se

$$\begin{aligned} \Omega_k &= \xi_k^T \Theta_k \xi_k = x_{k+1}^T Q^{-1}(\alpha_{k+1}) x_{k+1} + x_k^T [-Q^{-1}(\alpha_k) + \bar{d}S(\alpha_k) \\ &+ R_1] x_k + x_{k-d_k}^T [R_1 - S(\alpha_{k-d_k})] x_{k-d_k} - 2x_{k-d_k}^T R_1 x_{k-\bar{d}} - w_{dk}^T R_1 w_{dk}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Tendo em vista que  $w_{dk} = x_{k-d_k} - x_{k-\bar{d}}$  e a LMI (4.23) é factível e seguindo (MIRANDA; LEITE; CALDEIRA, 2010), chega-se em

$$\Delta V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k) \leq \Omega_k < \mathbf{0}. \quad (4.31)$$

Portanto, conclui-se que o resultado factível de (4.23) assegura a negatividade de  $\Delta V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k)$  e diante da positividade de  $V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k)$  e o teorema de Lyapunov-Krasovskii (NICULESCU, 2001, Pag 31) e (FRIDMAN, 2014) assegura-se a estabilidade local do modelo fuzzy T-S (4.2)–(4.5) em malha fechada a partir da lei de controle (4.7)–(4.8) com ganhos dados por (4.25) sempre que a trajetória dos estados evoluírem no interior do conjunto  $\mathcal{V}_0$ .

Na prova do Teorema 3.1, mostra-se que, se as desigualdades (4.24) são verificadas, então tem-se que  $\mathcal{L}_{V_1} \subseteq \mathcal{V}_0$  e para qualquer trajetória começando em  $\Upsilon_\varphi$  permanece em  $\mathcal{L}_{V_1}$  e, portanto, a estabilidade local do sistema não linear (4.1) em malha fechada a partir da lei de controle (4.7)–(4.8) com ganhos dados por (4.25) é assegurada. ■

### 4.3.1 Problema de otimização convexa

Considerando o Teorema 4.1 e o Problema 4.1, um importante requisito complementar é maximizar a região de estabilidade estimada  $\Upsilon_\varphi$  para o sistema não linear (4.1) em malha fechada com a lei de controle (4.7)–(4.8). Diante disso, o Teorema 4.1 pode ser utilizado para computar o conjunto  $\Upsilon_\varphi$  o maior possível por meio de um problema de otimização convexa. Existem diferentes formas de resolver tal problema de otimização, e para o problema em questão, considerou-se a maximização de um conjunto elipsoidal incluso no conjunto de nível  $\mathcal{L}_{V_1}$  como se segue:

$$\mathcal{E}(W) = \{x \in \mathbb{R}^n; x^T W x \leq 1\} \subseteq \mathcal{L}_{V_1}. \quad (4.32)$$

Essa inclusão é equivalente a:

$$\begin{bmatrix} W & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & Q_i \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad i \in \mathcal{I}[1, N]. \quad (4.33)$$

Assim, um problema de otimização convexa é proposto como se segue:

$$\mathcal{P}_W \begin{cases} \min & \text{traço}(W) \\ \text{sujeito a} & (4.23), (4.24), \text{ e } (4.33). \end{cases} \quad (4.34)$$

## 4.4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Para verificar os resultados propostos neste capítulo, são utilizados os mesmos sistemas explorados no capítulo anterior na parte de estabilização local.

### 4.4.1 Sistema acadêmico

A partir dos modelos fuzzy T-S encontrados para os sistemas não lineares de natureza acadêmica apresentados no Exemplo 2.2.1 do Capítulo 2, foram utilizadas cinco condições de sínteses de controladores: as condições propostas neste capítulo, uma referente às condições apresentadas no Capítulo 3, sendo a lei de controle  $u_k = K(\alpha_k)x_k$ , e três condições encontradas em artigos sobre sistemas fuzzy T-S. Os resultados obtidos na tentativa de encontrar soluções factíveis estão

Tabela 2 – Resultados de condições de síntese de controladores

Condição	Resultado: $c_1 = c_2 = 1$	Resultado: $c_1 = 0.64$ e $c_2 = 0.8$
(4.34)	Infactível	Factível
(3.54)	Infactível	Factível
(GAO; LIU; LAM, 2009)	Infactível	Infactível
(WU et al., 2011b)	Infactível	Infactível
(WU et al., 2013)	Infactível	Infactível

apresentados na Tabela 2.

A partir dos resultados expostos na Tabela 2, observa-se que para o exemplo em questão sendo  $c_1 = c_2 = 1$  nenhuma das condições encontra solução; já para  $c_1 = 0.64$  e  $c_2 = 0.8$  as condições apresentadas neste capítulo e no capítulo anterior encontram soluções, o que não acontece com as três condições presentes em artigos da literatura de fuzzy. Vale destacar que (4.34) calcula leis de controle que realimentam os vetores de estados atuais e de estados com atraso máximo, já as outras quatro condições calculam leis de controle que realimentam somente o vetor de estados atuais.

Para comparar as duas condições que encontraram soluções para o sistema com  $c_1 = 0.64$  e  $c_2 = 0.8$ , foram calculadas as regiões de estabilidade  $\Upsilon_\varphi$ , sendo considerado para ambos os casos que  $\|\phi_{5,0}\|_5 = 0$  e  $c(\phi_{5,0}) = 1$ , portanto  $\mathcal{C}_x = \mathcal{L}_{V_1}$ . As duas regiões estão mostradas na Figura 10, sendo  $\mathcal{C}_{x1}$  a região obtida a partir de (4.34) e  $\mathcal{C}_{x2}$  a região obtida por meio de (3.54). Note que esse último apresenta uma região visivelmente maior que o primeiro. De forma mais precisa, a área estimada para  $\mathcal{C}_{x1}$  é 4.7151, já a área estimada para  $\mathcal{C}_{x2}$  é 5.4331, sendo assim a área estimada para  $\mathcal{C}_{x2}$  é 15,23% maior que a área estimada para  $\mathcal{C}_{x1}$ . Esse resultado numérico não está de acordo com o esperado, visto que as condições propostas neste capítulo são baseadas em uma função L-K mais completa que as condições propostas no capítulo anterior e, além disso, tem-se o fato das condições propostas neste capítulo terem grau de liberdade maior que as condições propostas no capítulo anterior. Vale ressaltar que essas condições propostas no capítulo anterior são compostas de matrizes variáveis  $U$  e  $H$  que estão multiplicando diretamente as matrizes do sistema. A princípio isso introduz uma redução considerável de conservadorismo nessas condições. Um outro fato interessante de observar é que a candidata à função L-K utilizada para desenvolver as condições apresentadas neste capítulo apresenta a matriz simétrica definida positiva  $R_1$  independente da função



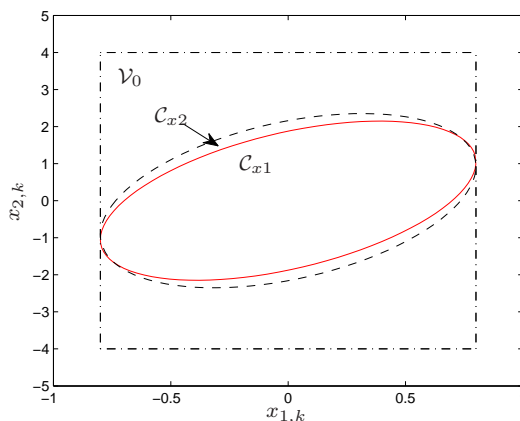


Figura 10 – Conjuntos  $\mathcal{V}_0$ ,  $\mathcal{C}_{x1}$  e  $\mathcal{C}_{x2}$ .

de pertinência. Isso foi necessário fazer em consequência da metodologia utilizada para tratar a variável instrumental  $\omega_{d_k}$ . Portanto, uma investida em métodos diferentes para tratar essa variável instrumental pode possibilitar que a matriz  $R_1$  possa ser dependente da função de pertinência. Essa ação pode reduzir o conservadorismo de eventuais condições a serem desenvolvidas comparadas com as aqui apresentadas.

Apesar do resultado inesperado encontrado, as condições aqui propostas obtiveram desempenho numérico melhor comparadas com condições encontradas em artigos da literatura de sistemas fuzzy. Na tentativa de obter resultados melhores a partir da suposição da impossibilidade de mensurar ou estimar o atraso variante no tempo sendo utilizadas as informações de estados atrasados nas leis de controle projetadas, são apresentados resultados bastante promissores no próximo capítulo, em que os resultados numéricos encontrados superam todos os outros obtidos nesta tese.

Na continuação desse exemplo é explorado o sistema não linear que representa a dinâmica de um levitador magnético e nessa etapa são mostrados mais resultados numéricos, inclusive comparados com condições da literatura, além das já utilizadas neste momento tem também uma referente aos resultados apresentados no capítulo anterior e uma extensão desses.

#### 4.4.2 Sistema com motivação prática

Considere o sistema não linear discreto no tempo com atraso variante nos estados que representa a dinâmica de um levitador magnético (2.27), sendo esse também explorado no Exemplo 3.4 do capítulo anterior. Resolvendo o problema de otimização convexo (4.34) para o modelo fuzzy T-S tratado neste exemplo, obtém-se

$$W = \begin{bmatrix} 402.7513 & 2.769 \\ 2.769 & 2.7889 \end{bmatrix}.$$

e os seguintes ganhos para a lei de controle (4.7)–(4.8):

$$\begin{aligned} K_1 &= - \begin{bmatrix} 24.1570 & 10.1892 \end{bmatrix}, & K_{\bar{d}1} &= \begin{bmatrix} 0.0025 & -0.0019 \end{bmatrix}, \\ K_2 &= - \begin{bmatrix} 23.5138 & 10.1831 \end{bmatrix}, & K_{\bar{d}2} &= \begin{bmatrix} 0.0039 & -0.0037 \end{bmatrix}, \\ K_3 &= - \begin{bmatrix} 34.6331 & 14.6527 \end{bmatrix}, & K_{\bar{d}3} &= \begin{bmatrix} -0.0019 & 0.002 \end{bmatrix}, \\ K_4 &= - \begin{bmatrix} 33.9998 & 14.6458 \end{bmatrix} & \text{e } K_{\bar{d}4} &= \begin{bmatrix} -0.0042 & 0.0035 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Além disso, foi obtido  $\rho = 6.0893$  a partir da solução de (4.20). A partir desses valores e considerando o conjunto  $\mathcal{V}_0$ , pode-se determinar o valor máximo aceitável para  $r$  por meio do Lema 4.1, o que produz  $r \leq \rho^{-1/2} = 0.4052$ . Portanto, pode-se escolher o valor de  $r$  verificando  $0 \leq r \leq 0.4052$  e, por consequência disso, tem-se o conjunto  $\mathcal{B}_\phi$  dado como em (3.17). É importante ressaltar que, de acordo com o valor selecionado para  $r$ , pode-se chegar a uma relação para  $\|\phi_{\bar{d},0}\|_5 \leq r$  que não satisfaça  $[\phi_{\bar{d},0}]_j \in \mathcal{V}_0$ , para  $j \in \mathcal{I}[1, 5]$ . Diante disso, a caracterização da região  $\mathcal{B}_\phi$  é obtida da verificação que  $\|\phi_{\bar{d},0}\|_5 \leq r$  e  $[\phi_{\bar{d},0}]_j \in \mathcal{V}_0$ , para  $j \in \mathcal{I}[1, 5]$ , como pode-se perceber em (3.17). Para o exemplo em questão, isso que foi descrito representa que a velocidade admissível para a bola pode ser  $|x_{2,k}| \geq 0.05m/s$ . Note que essa consideração reduz o conservadorismo dos resultados propostos. Na sequência, são tratados dois tipos de análises: uma relativa ao tamanho da região  $\mathcal{C}_x$  e a outra relacionada às trajetórias do sistema não linear em malha fechada pelo controlador fuzzy T-S.

#### Análise do tamanho de $\mathcal{C}_x$

A partir do conjunto  $\mathcal{B}_\phi$  computado no parágrafo anterior, pode-se calcular conjuntos  $\mathcal{C}_x$ , como dados em (3.16) e (4.19). A partir disso, é possível investigar o conjunto  $\mathcal{C}_x$  em função de  $\|\phi_{5,0}\|_5$ . Os resultados obtidos podem ser vistos na Figura 11. Note que, como esperado, o tamanho do conjunto  $\mathcal{C}_x$  diminuiu quando o valor de  $\|\phi_{5,0}\|_5$  aumenta.

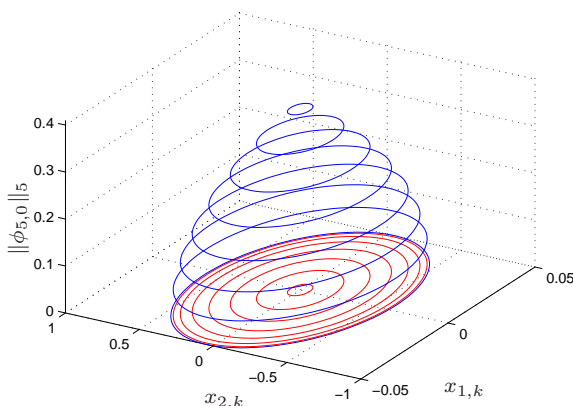


Figura 11 – Estimação de  $\mathcal{C}_x$  em função de  $\|\phi_{5,0}\|_5$ .

Tabela 3 – Comparação dos tamanhos das regiões de estabilidade

Prob. Otim.	Tamanho de $\mathcal{E}(W)$
(4.34)	1
(SILVA et al., 2014c)	1.003
(SILVA et al., 2014a)	0.693

Assumindo que todas as condições iniciais sejam nulas para o sistema não linear (2.27) em malha fechada, então tem-se que  $r = 0$  resultando em  $\|\phi_{5,0}\|_5 = 0$  e  $c(\phi_{5,0}) = 1$ . Note que nessa situação o conjunto  $\mathcal{C}_x$  é igual a  $\mathcal{L}_{V_1}$ . Neste momento o interesse é estimar o tamanho do conjunto  $\mathcal{L}_{V_1}$  ou  $\mathcal{C}_x$ , dado em (3.16) e (4.19), a partir do tamanho de  $\mathcal{E}(W)$ , sendo que o tamanho desse conjunto elipsoidal, nomeado  $s_{\mathcal{E}}$ , é proporcional a  $(\det(W))^{-1/2}$  (BOYD et al., 1994). Assim, pode-se comparar o tamanho de  $\mathcal{L}_{V_1}$  estimado obtido a partir das condições propostas neste capítulo com as condições propostas em (SILVA et al., 2014a, 2014c). Observe que os resultados apresentados em (SILVA et al., 2014c) são resultados preliminares dos resultados apresentados no Capítulo 3. Os valores estimados estão apresentados na Tabela 3, em que esses valores foram normalizados por  $\bar{s}_{\mathcal{E}} = 0.0299$  que é o tamanho de  $\mathcal{C}_x$  sendo  $\|\phi_{5,0}\|_5 = 0$ .

As condições desenvolvidas em (SILVA et al., 2014a, 2014c) apresentam uma diferença na lei de controle proposta neste capítulo, pois

neles a lei de controle, além de realimentar o estado atual, realimenta o estado atraso,  $x_{k-d_k}$ ; já a lei de controle proposta neste capítulo realimenta o estado atual e o estado com atraso máximo,  $x_{k-\bar{d}}$ . Note que essa diferença pode ser bastante significativa em aplicações reais, uma vez que o valor do atraso,  $d_k$ , é necessário ser conhecido em cada amostra nos resultados apresentados em (SILVA et al., 2014a, 2014c). Tal necessidade não é requisito nas condições desenvolvidas neste capítulo. Como apresentado na Tabela 3, o tamanho da região  $\mathcal{C}_x$  estimada a partir dos resultados deste capítulo, sem o requisito do conhecimento de  $d_k$ , é 30.7% maior que a região computada por (SILVA et al., 2014a, Teorema 1) e 0.3% menor que o tamanho da região determinada por (SILVA et al., 2014c, Teorema 5). Isso ilustra que a utilização da lei de controle (4.7) pode não introduzir um conservadorismo relevante nos resultados numéricos do sistema em questão.

### Trajetórias do sistema não linear em malha fechada pelo controlador fuzzy T-S

A partir das condições propostas por (GAO; LIU; LAM, 2009), (WU et al., 2011b) e (WU et al., 2013), sintetizaram-se controladores para estabilizar o sistema não linear em questão. A partir disso, é possível fazer comparações sobre o comportamento das trajetórias de estados geradas para o sistema não linear em malha fechada para diferentes condições iniciais e diferentes controladores. Diferentemente das condições propostas neste capítulo, os resultados apresentados nessas três referências consideram a lei de controle com realimentação somente do estado atual, ou seja,  $u_k = K(\alpha_k)x_k$ . Além disso, na etapa de projeto de controlador dessas referências é necessário ajustar um parâmetro escalar  $\epsilon$ , sendo que para o caso tratado considerou-se  $\epsilon = 10$ . Para os artigos (GAO; LIU; LAM, 2009) e (WU et al., 2011b), obtiveram-se soluções factíveis, mas para o trabalho (WU et al., 2013) não foi possível encontrar solução (mesmo com valores positivos e elevados de  $\epsilon$ ). Diante disso, encontrou-se os seguintes ganhos a partir de (GAO; LIU; LAM, 2009, Teorema 2):

$$\begin{aligned} K_1 &= - \begin{bmatrix} 0.2861 & 7.1512 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 0.3017 & -7.1655 \end{bmatrix}, \\ K_3 &= - \begin{bmatrix} 0.3097 & 10.1833 \end{bmatrix}, K_4 = \begin{bmatrix} 0.3346 & -10.2008 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Já para (WU et al., 2011b, Teorema 4), obteve-se:

$$\begin{aligned} K_1 &= - \begin{bmatrix} 1.2052 & 5.5728 \end{bmatrix}, K_2 = - \begin{bmatrix} 0.6103 & 5.5875 \end{bmatrix}, \\ K_3 &= - \begin{bmatrix} 1.6420 & 8.1241 \end{bmatrix}, K_4 = - \begin{bmatrix} 0.9618 & 7.8954 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Num primeiro momento, foi considerado que as condições iniciais atrasadas são nulas, ou seja,  $[\phi_{5,0}]_j = [0 \ 0]^T$ ,  $j \in \mathcal{I}[1, 5]$  e, assim, tem-se  $\|\phi_{5,0}\|_5 = 0$ . Diante disso, utilizou-se a lei de controle (4.7)–(4.8) com ganhos apresentados em (4.35) para realimentar o sistema não linear com atraso nos estados (2.27). Obteve-se os seguintes conjuntos  $\mathcal{C}_x = \mathcal{L}_{V_1}$  e  $\mathcal{B}_\phi = \{0\}$ . Na Figura 12, são apresentados o conjunto  $\mathcal{C}_x = \mathcal{L}_{V_1}$  (linha pontilhada) e sete trajetórias estáveis para condições iniciais  $\varphi_{5,0} = \{\phi_{5,0}, x_0\} \in E_\varphi$ ,  $\phi_{5,0} \in E_\phi$ , e  $x_0 \in E_x$ , com  $[\phi_{5,0}]_j = [0 \ 0]^T$ ,  $j \in \mathcal{I}[1, 5]$  e  $x_0^i = [x_{1,0} \ x_{2,0}]^T$ , para  $i \in [1, 7]$ , ( $\times$  marcas).

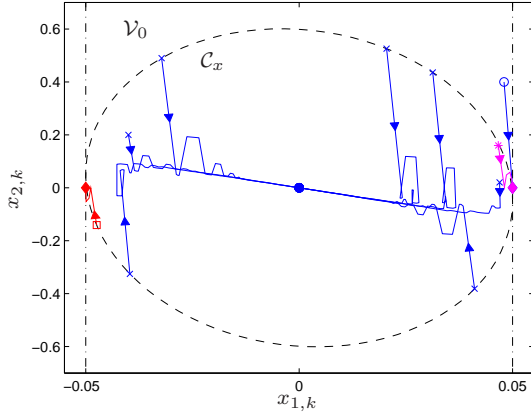


Figura 12 –  $\mathcal{V}_0$ ,  $\mathcal{C}_x$  e trajetórias de estados que convergem para origem e que convergem para pontos de equilíbrio diferentes da origem.

Na simulação utilizada para gerar as trajetórias de estados apresentadas na figura em questão, considerou-se  $d_k = 3 - \text{round}(2 \cos(0.2k))$ ,  $|x_{1,k}| \leq 0.05$  e se  $|x_{1,k}| = 0.05$ , então  $x_{2,k} = 0$  devido às restrições físicas do sistema. Note que todas essas trajetórias que convergem para a origem do sistema controlado são geradas a partir de condições iniciais localizadas no interior da região de validade. Além disso, há uma trajetória que não converge para a origem marcada por  $\circ$ , cuja a sequência da condição inicial que a gerou não pertence a região de estabilidade estimada. Diante disso, observa-se que não se pode garantir a convergência para a origem de trajetórias geradas por condições iniciais que não pertençam a região de validade estimada.

Considerando agora os controladores (4.36) e (4.37) projetados a partir das condições (GAO; LIU; LAM, 2009, Teorema 2) e (WU et

al., 2011b, Teorema 4), respectivamente, obtém-se trajetórias para os sistemas em malha fechada com tais controladores. Para realizar as simulações, têm-se duas condições iniciais sendo  $\varphi_{5,0} = \{\phi_{5,0}, x_0\} \in E_\varphi$ ,  $\phi_{5,0} \in E_\phi$  e  $x_0 \in E_x$ , com  $[\phi_{5,0}]_j = [0 \ 0]^T$ ,  $j \in \mathcal{I}[1, 5]$  e  $x_0^i = [x_{1,0} \ \bar{x}_{2,0}]^T$ , para  $i \in \mathcal{I}[1, 2]$ , em que  $x_0^1 = [0.04665 \ 0.16]^T$  marcado por \* e  $x_0^1 = [-0.04745 \ -0.1408]^T$  marcado por  $\square$ . A primeira trajetória gerada a partir da primeira condição inicial apresentada é obtida pelo sistema não linear em malha fechada com o controlador sintetizado pelo método de (GAO; LIU; LAM, 2009, Teorema 2) e a segunda trajetória gerada pela segunda condição inicial apresentada é obtida pelo sistema não linear em malha fechada com o controlador calculado por (WU et al., 2011b, Teorema 4). Observa-se que nos dois casos as condições iniciais pertencem a região de estabilidade estimada pelos resultados apresentados neste capítulo. Contudo, em nenhum dos casos essas trajetórias convergem assintoticamente para origem, convergindo assim para pontos de equilíbrio diferentes da origem. Vale ressaltar que as condições apresentadas nos trabalhos em questão não levam em consideração a região de validade e, com isso, elas propõe soluções globais para o problema de estabilização. Porém, percebe-se que quando os resultados encontrados nesses trabalhos são aplicados nos sistemas não lineares que geraram os modelos fuzzy T-S não se tem garantia da estabilidade.

Considere agora a situação em que o sistema não linear em malha fechada possui condições iniciais atrasadas não nulas. Para o exemplo em questão, considera-se  $\|\phi_{5,0}\|_5 = 0.2$  e, portanto,  $\mathcal{C}_x \subset \mathcal{L}_{V_1}$ ,  $\mathcal{B}_\phi$  é definido como (3.17) com  $r = 0.2$ . Nessa situação, tem-se  $\varphi_{5,0} = \{\phi_{5,0}, x_0\} \in E_\varphi$  e escolhe-se  $[\phi_{5,0}]_j = [0 \ 0.2]^T$ ,  $j \in \mathcal{I}[1, 5]$  e  $x_0 = [0.03767 \ 0.00347]^T$ . Na Figura 13 é apresentada a trajetória resultante para o sistema não linear em questão realimentado pelo controlador (4.7)–(4.8) com os ganhos (4.35). Como pode-se observar a trajetória evolui fora do conjunto  $\mathcal{C}_x$ , mas sempre no interior de  $\mathcal{L}_{V_1}$  e como esperado converge assintoticamente para a origem.

## 4.5 CONCLUSÕES

Neste capítulo, foram apresentadas condições convexas dependentes do atraso para a síntese de controladores fuzzy T-S utilizados para estabilizar localmente sistemas não lineares discretos no tempo com atraso variante nos estados. As condições foram desenvolvidas

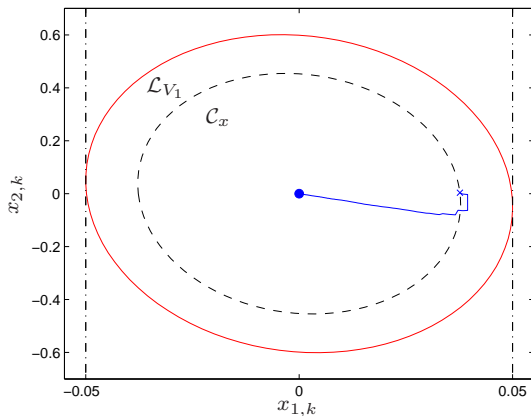


Figura 13 – Conjuntos  $\mathcal{L}_{V_1}$  e  $\mathcal{C}_x$ , e uma trajetória de estado.

baseadas em uma candidata à função fuzzy L-K e são formuladas em termos de LMIs. O atraso variante no tempo é limitado pelo valor superior,  $\bar{d}$ , e essa informação foi utilizada na lei de controle de realimentação de estados.

Como considerado nesta tese, o modelo fuzzy T-S representa de forma exata o sistema não linear discreto no tempo com atraso nos estados no interior da região de validade. Em consequência disso, estimou-se a região de estabilidade para o sistema não linear em malha fechada com o controlador fuzzy T-S sintetizado. Da mesma forma como feito nos capítulos anteriores, a caracterização da região de estabilidade é feita a partir de dois conjuntos, sendo que um descreve a região de valores seguros para o vetor de estados atuais enquanto o outro define a região para os elementos das condições iniciais atrasadas. Por meio do problema de otimização convexa proposto, pode-se computar os ganhos fuzzy para o controlador que maximizam a região de estabilidade do sistema não linear em malha fechada com o controlador fuzzy T-S. Finalmente, apresentou-se exemplos numéricos para ilustrar os resultados propostos.

Vale destacar que por meio dos exemplos numéricos foi possível perceber que as condições propostas neste capítulo apresentam resultados menos conservadores comparados com resultados encontrados na literatura. Porém, quando há a comparação com os resultados desenvolvidos no Capítulo 3, esses se mostram superior. Como já mencionado

no texto do exemplo, esse resultado não era o esperado. Sendo identificadas as possíveis causas de conservadorismo nas condições propostas neste capítulo, que também estão descritas no texto do exemplo, tem-se trabalho constantemente para a melhoria desses resultados. Contudo, evidencia-se que no decorrer deste documento é apresentada uma abordagem alternativa para tratar o problema ora considerado, baseando-se na reescrita do modelo fuzzy como um sistema aumentado chaveado.



## 5 ESTABILIZAÇÃO LOCAL VIA ABORDAGEM SISTEMA AUMENTADO CHAVEADO

Neste capítulo, são propostas condições convexas para a estabilização local de sistemas não lineares discretos no tempo com atraso variante nos estados via realimentação de toda a sequência de vetores de estados do sistema. Portanto, diferentemente do que foi feito em capítulos anteriores, aqui são projetados ganhos para realimentarem desde o vetor de estado  $x_k$  até o vetor de estado  $x_{k-\bar{d}}$ . Note que para implementar essa lei de controle não é necessário mensurar ou estimar o valor do atraso variante no tempo,  $d_k$ . A partir da representação exata local do sistema não linear em questão por modelo fuzzy T-S com atraso variante nos estados, representa-se esse modelo com atraso variante nos estados por um modelo fuzzy T-S aumentado chaveado pelo valor do atraso seguindo a proposta definida em (HETEL; DAAFOUZ; IUNG, 2008) para sistemas precisamente conhecidos. Diante disso, as condições de síntese propostas são baseadas em uma candidata à função fuzzy de Lyapunov-Krasovskii de estado aumentado e são representadas em termos de desigualdades matriciais lineares.

Considerando a representação local exata do modelo fuzzy T-S e, por consequência, do modelo fuzzy T-S chaveado, é necessário estimar regiões de estabilidade tais que as trajetórias iniciadas nessas regiões converjam assintoticamente para a origem. A metodologia utilizada para estimar essas regiões de estabilidade segue a mesma idéia já exposta em capítulos anteriores, em que calculam-se dois conjuntos: um para tratar o vetor de estado atual, e o outro para lidar com os vetores de estados atrasados. Além disso, propõe-se um problema de otimização convexa para calcular os ganhos do controlador fuzzy T-S que maximizem as regiões de estabilidade estimadas para o sistema não linear em malha fechada. Finalmente, são apresentados exemplos numéricos para demonstrar a eficiência das condições desenvolvidas.

### 5.1 COLOCAÇÃO DO PROBLEMA

Considere a classe de sistemas não lineares discretos no tempo com atraso variante no tempo nos estados:

$$x_{k+1} = f(x_k)x_k + f_d(x_k)x_{k-d_k} + g(x_k)u_k, \quad (5.1)$$

em que  $x_k \in E_x \subseteq \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u_k \in E_u \subseteq \mathbb{R}^m$  é o vetor de entrada de controle, e  $d_k \in \mathbb{N}^*$  denota o atraso variante no tempo que verifica  $1 \leq d_k \leq \bar{d}$ , em que  $\bar{d}$  é o limite superior do atraso. As funções  $f(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $f_d(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $g(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  são contínuas e limitadas para todo  $x_k \in E_x$ . As condições iniciais são dadas pela sequência  $\varphi_{\bar{d},0} \in E_\varphi$ .

Como realizado anteriormente, efetua-se a modelagem fuzzy T-S para representar de forma exata o sistema não linear (5.1) da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Regra } i : & \text{SE } z_{1,k} \text{ é } M_{i1} \text{ e } \cdots \text{ e } z_{p,k} \text{ é } M_{ip}, \\ & \text{ENTÃO } x_{k+1} = A_i x_k + A_{di} x_{k-d_k} + B_i u_k, \end{array} \quad (5.2)$$

O processo de defuzzificação do modelo (5.2) pode ser representado por (TANAKA; WANG, 2001):

$$x_{k+1} = A(\alpha_k) x_k + A_d(\alpha_k) x_{k-d_k} + B(\alpha_k) u_k, \quad (5.3)$$

O vetor de função de pertinência  $\alpha_k \in \Xi$  é dependente dos estados, assume-se que ele está acessível em tempo real e  $\Xi$  é dado por:

$$\Xi = \left\{ \alpha_k \in \mathbb{R}^N; \sum_{i=1}^N \alpha_{k(i)} = 1, \alpha_{k(i)} \geq 0, i \in \mathcal{I}[1, N] \right\}. \quad (5.4)$$

Diante disso, as matrizes em (5.3) podem ser reescritas como:

$$\begin{bmatrix} A(\alpha_k) & A_d(\alpha_k) & B(\alpha_k) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \alpha_{k(i)} \begin{bmatrix} A_i & A_{di} & B_i \end{bmatrix}, \alpha_k \in \Xi. \quad (5.5)$$

A representação do sistema não linear (5.1) pelo modelo fuzzy T-S (5.2)–(5.5) é válida somente no interior da região de validade, como já mencionado. Essa região é definida pelo conjunto poliédrico  $\mathcal{V}_0$  dado por:

$$\mathcal{V}_0 = \{x_k \in \mathbb{R}^n; |L_{(i)} x_k| \leq \eta_{(i)}\} \subseteq E_x, \quad (5.6)$$

em que  $\eta_{(i)} > 0$ ,  $L_{(i)} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ , sendo  $i \in \mathcal{I}[1, \kappa]$ , e  $\kappa$  representando o número de restrições que caracteriza a região permitida no espaço de estados para o sistema em malha fechada.

Utilizando a compensação paralela distribuída, propõe-se a seguinte lei de controle fuzzy para realimentar o sistema não linear (5.1):

$$u_k = \mathbf{K}(\alpha_k) \xi_{k,\varphi}, \quad (5.7)$$

sendo  $\mathbf{K}(\alpha_k) = [K_0(\alpha_k) \ K_1(\alpha_k) \ \cdots \ K_{\bar{d}}(\alpha_k)] \in \mathbb{R}^{m \times (\bar{d}+1)n}$  e  $\xi_{k,\varphi} = \text{Vec}(\varphi_{\bar{d},k}) = [x_k^T \ x_{k-1}^T \ \cdots \ x_{k-\bar{d}}^T]^T \in \mathbb{R}^{(\bar{d}+1)n}$ . Note que essa lei de controle realimenta todos os estados do sistema não linear, vetor de estado atual e vetores de estados atrasados. Portanto, fazendo-se apenas  $K_0(\alpha_k)$  e  $K_{\bar{d}}(\alpha_k)$  não nulos, retorna-se à lei de controle (4.7). A matriz do controlador é dependente da função de pertinência e, portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\alpha_k) &= \sum_{i=1}^N \alpha_{k(i)} \mathbf{K}_i, \quad \alpha_k \in \Xi, \\ \mathbf{K}_i &= [K_{0i} \ K_{1i} \ \cdots \ K_{\bar{d}i}]. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Assim, substituindo (5.7) em (5.3), obtém-se o seguinte modelo fuzzy T-S em malha fechada

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A(\alpha_k) + B(\alpha_k)K_0(\alpha_k))x_k + A_d(\alpha_k)x_{k-d_k} \\ &\quad + B(\alpha_k) [K_1(\alpha_k) \ \cdots \ K_{\bar{d}}(\alpha_k)] \xi_{k,\phi}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

sendo  $\xi_{k,\phi} = \text{Vec}(\phi_{\bar{d},k}) = [x_{k-1}^T \ x_{k-2}^T \ \cdots \ x_{k-\bar{d}}^T]^T \in \mathbb{R}^{\bar{d}n}$ . Vale destacar que esse modelo fuzzy de malha fechada representa de forma exata o sistema não linear (5.1) em malha fechada com o controlador (5.7)–(5.8) se as trajetórias dos estados resultantes evoluírem em  $\mathcal{V}_0$  e, por consequência,  $\alpha_k \in \Xi$ .

Dessa forma, faz-se necessária a caracterização da região de estabilidade  $\Upsilon_\varphi$ , garantindo-se assim que toda trajetória do sistema não linear (5.1) realimentado com a lei de controle (5.7)–(5.8), iniciando em  $\Upsilon_\varphi$ , permanecerá confinada em  $\mathcal{V}_0$ . Diante disso, a seguir é apresentado o principal problema tratado neste capítulo.

**Problema 5.1** *Determinar os ganhos fuzzy  $\mathbf{K}_i \in \mathbb{R}^{m \times (\bar{d}+1)n}$ ,  $i \in \mathcal{I}[1, N]$ , da lei de controle (5.7)–(5.8) e caracterizar a região de estabilidade  $\Upsilon_\varphi$  tal que as trajetórias do sistema em malha fechada (5.1), (5.7)–(5.8) permaneçam confinadas em  $\mathcal{V}_0$  e convirjam assintoticamente para origem sempre que as condições iniciais dadas pela sequência  $\varphi_{\bar{d},0}$  com elementos  $[\varphi_{\bar{d},0}]_j \in \Upsilon_\varphi$ ,  $j \in \mathcal{I}[1, \bar{d} + 1]$ .*

## 5.2 RESULTADOS PRELIMINARES

Em (HETEL; DAAFOUZ; IUNG, 2008) é proposta a representação de sistemas precisamente conhecidos, discretos no tempo e com atraso variante nos estados por sistemas chaveados de estados aumentados,

sendo que a lei de chaveamento é determinada pela dinâmica do atraso. Seguindo essa idéia, pode-se representar o modelo fuzzy T-S com atraso nos estados (5.3)–(5.5) por um modelo fuzzy T-S de estado aumentado e chaveado como segue

$$\xi_{k+1,\varphi} = \mathbf{A}_{\sigma_k}(\alpha_k)\xi_{k,\varphi} + \mathbf{B}(\alpha_k)u_k, \quad (5.10)$$

em que

$$\mathbf{A}_{\sigma_k}(\alpha_k) = \begin{bmatrix} A(\alpha_k) & \Sigma_{\sigma_k,1}(\alpha_k) & \Sigma_{\sigma_k,2}(\alpha_k) & \cdots & \Sigma_{\sigma_k,\bar{d}}(\alpha_k) \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

com

$$\Sigma_{\sigma_k,i} = \begin{cases} A_d(\alpha_k), & i = \sigma_k \\ \mathbf{0}, & i \neq \sigma_k \end{cases} \quad \forall i \in \mathcal{I}[1, \bar{d}], \quad (5.12)$$

$\mathbf{B}(\alpha_k) = [B(\alpha_k)^T \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \cdots \quad \mathbf{0}]^T$  e  $\sigma_k \in \mathcal{I}[1, \bar{d}]$  é a função de chaveamento do sistema (5.10) definida como  $\sigma_k = d_k$ .

Substituindo-se a lei de controle (5.7) em (5.10), obtém-se o seguinte modelo fuzzy T-S de estado aumentado e chaveado em malha fechada

$$\xi_{k+1,\varphi} = \hat{\mathbf{A}}_{\sigma_k}(\alpha_k)\xi_{k,\varphi}, \quad (5.13)$$

em que a matriz de malha fechada  $\hat{\mathbf{A}}_{\sigma_k}(\alpha_k)$  é

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}_{\sigma_k}(\alpha_k) &= \mathbf{A}_{\sigma_k}(\alpha_k) + \mathbf{B}(\alpha_k)\mathbf{K}(\alpha_k) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^N \mu_{ij} \alpha_{k(i)} \alpha_{k(j)} \frac{\mathbf{A}_{\sigma_k,i} + \mathbf{B}_i \mathbf{K}_j + \mathbf{A}_{\sigma_k,j} + \mathbf{B}_j \mathbf{K}_i}{2} \end{aligned} \quad (5.14)$$

com

$$\mu_{ij} = 2 \text{ se } i \neq j, \text{ ou } \mu_{ij} = 1 \text{ se } i = j. \quad (5.15)$$

O modelo fuzzy T-S chaveado de estado aumentado em malha fechada (5.13)–(5.14) é utilizado para calcular os ganhos da lei de controle (5.7)–(5.8). Aplicando-se essa lei de controle no sistema não linear (5.1) e considerando-se que  $[\varphi_{\bar{d},0}]_j \in \Upsilon_\varphi$ ,  $j \in \mathcal{I}[1, \bar{d} + 1]$ , garante-se que as trajetórias resultantes evoluirão no interior da região de validade,  $\mathcal{V}_0$ , e, portanto, tem-se um sistema em malha fechada (5.1), (5.7)–(5.8) assintoticamente estável.

Considere a candidata à função fuzzy L-K,  $V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k) : E_\varphi \times \Xi \mapsto \mathbb{R}^+$ :

$$\begin{aligned} V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k) &= V_1(x_k, \alpha_k) + V_{\bar{d}}(\xi_{k,\phi}) = x_k^T Q^{-1}(\alpha_k) x_k \\ &\quad + \xi_{k,\phi}^T \mathbf{R}^{-1} \xi_{k,\phi} = \xi_{k,\varphi}^T \mathbf{Q}^{-1}(\alpha_k) \xi_{k,\varphi}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\text{com } Q(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \alpha_{k(i)} Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n\bar{d} \times n\bar{d}},$$

$$\mathbf{Q}(\alpha_k) = \begin{bmatrix} Q(\alpha_k) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix}, \quad (5.17)$$

$$\mathbf{Q}(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \alpha_{k(i)} \mathbf{Q}_i \in \mathbb{R}^{n(\bar{d}+1) \times n(\bar{d}+1)} \text{ e } \mathbf{Q}_i = \text{diag}(Q_i, \mathbf{R}).$$

Diferentemente de como é proposto em (HETEL; DAAFOUZ; IUNG, 2008), a matriz aumentada de Lyapunov,  $\mathbf{Q}(\alpha_k)$ , depende somente da função de pertinência, sendo quadrática em relação a  $\sigma_k$ . Além disso, essa matriz tem termos nulos que são necessários pela forma de caracterizar a região de estabilidade nesta tese, pois essa região é caracterizada a partir do desacoplamento das condições iniciais atuais,  $k = 0$ , e condições iniciais atrasadas e assim não se pode ter na função L-K termos relacionando as condições iniciais atuais com as atrasadas. Vale destacar também que a candidata à função L-K (5.16) é mais completa que as candidatas às funções L-K tratadas nos capítulos anteriores. Dessa forma, os resultados obtidos aqui são mais gerais e menos conservadores que os resultados obtidos nos capítulos anteriores. Isso é explorado nos exemplos numéricos.

Novamente, segundo (FRIDMAN, 2014; STOJANOVIĆ; DEBELJKOVIĆ; MLADENOVIĆ, 2007), a função  $V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k) > 0$  em (5.16) é dita ser uma função L-K se

$$\Delta V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k) = V(\varphi_{\bar{d},k+1}, \alpha_{k+1}) - V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k) < 0. \quad (5.18)$$

Então, a estabilidade assintótica do modelo fuzzy (5.9) para  $\mathbf{K}(\alpha_k)$  dados e  $\alpha_k \in \Xi$  é suficiente quando a desigualdade (5.18) é verificada.

A caracterização da região de estabilidade  $\Upsilon_\varphi$  segue a Definição 3.2 do Capítulo 3. Assim,  $\Upsilon_\varphi$  é caracterizado por meio de dois conjuntos, sendo um para tratar o vetor de estado atual e o outro para lidar com vetor de estados atrasados. Note que na caracterização de  $\Upsilon_\varphi$ , o conjunto  $\mathcal{C}_x$  descreve a região permitida para valores do vetor de esta-

dos atuais enquanto o conjunto  $\mathcal{B}_\phi$  define a região para os elementos  $[\phi_{\bar{d},0}]_j \in E_j$ ,  $j \in \mathcal{I}[1, \bar{d}]$ . Sendo assim, calcula-se o conjunto  $\mathcal{C}_x$  a partir do conjunto de nível associado ao termo  $V_1(x_k, \alpha_k)$  da candidata à função L-K (5.16) que é dado pela intersecção dos conjuntos elipsoidais relativos as matrizes  $Q_i^T = Q_i > \mathbf{0}$ ,  $i \in \mathcal{I}[1, N]$ , ou seja,

$$\mathcal{L}_{V_1}(c) = \{\mathcal{E}(Q_i^{-1}, c), \forall \alpha_k \in \Xi\} = \bigcap_{\alpha_k \in \Xi} \mathcal{E}(Q^{-1}(\alpha_k), c) = \bigcap_{i \in \mathcal{I}[1, N]} \mathcal{E}(Q_i^{-1}, c) \subseteq \mathcal{V}_0, \quad (5.19)$$

em que  $c$  é um escalar positivo e  $\mathcal{E}(Q_i^{-1}, c)$ , para  $i \in \mathcal{I}[1, N]$ , denota os conjuntos elipsoidais definidos como se segue:

$$\mathcal{E}(Q_i^{-1}, c) = \{x_k \in \mathbb{R}^n; x_k^T Q_i^{-1} x_k \leq c\}. \quad (5.20)$$

No caso de  $c = 1$  em (5.19)–(5.20), utilizam-se as notações simplificadas  $\mathcal{L}_{V_1} = \mathcal{L}_{V_1}(1)$  e  $\mathcal{E}(Q_i^{-1}) = \mathcal{E}(Q_i^{-1}, 1)$ . A partir dos resultados apresentados no lema a seguir, é possível caracterizar os conjuntos  $\mathcal{C}_x$  e  $\mathcal{B}_\phi$  definidos em (3.16) e (3.17), respectivamente, e, por consequência,  $\Upsilon_\varphi$  que está apresentado em (3.15).

**Lema 5.1** *Se  $V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k)$  definida em (5.16) é uma função L-K fuzzy para o modelo fuzzy em malha fechada (5.9) e  $\mathcal{L}_{V_1} \subseteq \mathcal{V}_0$ , então a região  $\Upsilon_\varphi$  definida por*

$$\mathcal{C}_x = \{x_0 \in \mathbb{R}^n; V_1(x_0, \alpha_0) \leq 1 - \rho \|\phi_{\bar{d},0}\|_{\bar{d}}^2\} \subseteq \mathcal{V}_0, \quad (5.21)$$

com

$$\rho = \lambda_{\max}(\mathbf{R}^{-1}) \quad (5.22)$$

e  $r$  em (3.17) satisfazendo

$$0 \leq r \leq \rho^{-\frac{1}{2}} \quad (5.23)$$

é uma região de estabilidade assintótica para o modelo fuzzy em malha fechada em questão.

*Prova:* Considere o Lema 3.1 com  $c = 1 - \rho \|\phi_{\bar{d},0}\|_{\bar{d}}^2$ . Então, tem-se

$$\mathcal{C}_x = \mathcal{L}_{V_1}(1 - \rho \|\phi_{\bar{d},0}\|_{\bar{d}}^2) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n; x_0^T Q^{-1}(\alpha_0) x_0 \leq 1 - \rho \|\phi_{\bar{d},0}\|_{\bar{d}}^2\} \subseteq \mathcal{V}_0. \quad (5.24)$$

Da função L-K fuzzy, tem-se que a variável  $\rho$  deve satisfazer:

$$\xi_{0,\phi}^T \mathbf{R}^{-1} \xi_{0,\phi} \leq \rho \|\phi_{\bar{d},0}\|_{\bar{d}}^2. \quad (5.25)$$

Além disso, é necessário que  $0 \leq c \leq 1$  e isso é possível se somente, em (3.17),  $0 \leq r \leq \rho^{-\frac{1}{2}}$ . ■

A diferença existentes entre esse Lema e os lemas 3.3 e 4.1 está na forma de calcular o parâmetro  $\rho$ . Isso ocorre porque em cada um dos casos é utilizada uma candidata à função L-K diferente.

A conexão entre os conjuntos  $\mathcal{C}_x$  e  $\mathcal{B}_\phi$  é mostrada em termos do confinamento de trajetórias em  $\mathcal{L}_{V_1}$  no Lema 3.3 do Capítulo 3. Ademais, nesse lema também é mostrada a estabilidade local assintótica caso a função (5.16) seja uma função L-K e as condições iniciais do sistema resultante pertençam à região de estabilidade.

### 5.3 RESULTADO PRINCIPAL

No teorema apresentado na sequência, são mostradas condições dependentes do atraso que, se factíveis, fornecem uma solução para o Problema 5.1.

**Teorema 5.1** *Suponha que existam matrizes simétricas definidas positivas  $\mathbf{Q}_i \in \mathbb{R}^{(\bar{d}+1)n \times (\bar{d}+1)n}$ , para  $i \in \mathcal{I}[1, N]$ , com a mesma estrutura apresentada em (5.17) e as matrizes  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n(\bar{d}+1) \times n(\bar{d}+1)}$  e  $\mathbf{Y}_i \in \mathbb{R}^{m \times n(\bar{d}+1)}$ , satisfazendo,  $\forall i, q \in \mathcal{I}[1, N]$ ,  $j \in \mathcal{I}[i, N]$ ,  $\forall \sigma \in \mathcal{I}[1, \bar{d}]$  e  $\forall \ell \in \mathcal{I}[1, \kappa]$ :*

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{Q}_q & 0.5(\mathbf{A}_{\sigma,i}\mathbf{U} + \mathbf{B}_i\mathbf{Y}_j + \mathbf{A}_{\sigma,j}\mathbf{U} + \mathbf{B}_j\mathbf{Y}_i) \\ \star & 0.5(\mathbf{Q}_i + \mathbf{Q}_j) - \mathbf{U}^T - \mathbf{U} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (5.26)$$

e

$$\begin{bmatrix} -Q_i & Q_i L_{(\ell)}^T \\ \star & -\eta_{(\ell)}^2 \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}. \quad (5.27)$$

Então, as matrizes do controlador (5.8)

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{Y}_i \mathbf{U}^{-1} \quad (5.28)$$

são tais que a origem do sistema não linear (5.1) em malha fechada pela lei de controle (5.7)–(5.8) é assintoticamente estável para toda sequência de condições iniciais  $\varphi_{\bar{d},0}$ , com  $[\varphi_{\bar{d},0}]_j \in \Upsilon_\varphi$ ,  $j \in \mathcal{I}[1, \bar{d} + 1]$ , sendo os conjuntos  $\mathcal{C}_x$  e  $\mathcal{B}_\phi$  obtidos como mostrado no Lema 5.1,

assegurando que as respectivas trajetórias permaneçam em  $\mathcal{L}_{V_1} \subseteq \mathcal{V}_0$ .

*Prova:* Se (5.26) é verificada considerando os requisitos definidos no Teorema 5.1, então tem-se assegurada a positividade de  $\mathbf{Q}_i$ ,  $i \in \mathcal{I}[1, N]$ , com a estrutura como definida em (5.17), resultando que  $V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k)$  verifique (5.16). Substituindo  $\mathbf{Y}_i$  por  $\mathbf{K}_i \mathbf{U}$ , multiplicando a desigualdade resultante sucessivamente por  $\alpha_{k(i)}$ ,  $\alpha_{k(j)}$  e  $\alpha_{k+1(q)}$ , e somando em  $i \in \mathcal{I}[1, N]$ ,  $j \in \mathcal{I}[i, N]$  e  $q \in \mathcal{I}[1, N]$ , obtém-se

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{Q}(\alpha_k^+) & \hat{\mathbf{A}}_{\sigma_k}(\alpha_k)\mathbf{U} \\ \star & \mathbf{Q}(\alpha_k) - \mathbf{U}^T - \mathbf{U} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (5.29)$$

em que  $\hat{\mathbf{A}}_{\sigma_k}(\alpha_k)$  é dado em (5.14) e  $\alpha_k^+ \equiv \alpha_{k+1}$ . Note que a matriz  $\mathbf{Q}(\alpha_k)$  pode ser escrita como

$$\mathbf{Q}(\alpha_k) = \left( \sum_{j=1}^N \alpha_j \right) \mathbf{Q}(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^N \mu_{ij} \alpha_{k(i)} \alpha_{k(j)} 0.5(\mathbf{Q}_i + \mathbf{Q}_j),$$

com  $\mu_{ij}$  dado em (5.15).

Sendo  $-M^T G^{-1} M \leq G - M^T - M$  (veja Apêndice A.4), pode-se aplicar essa desigualdade no bloco (2, 2) de (5.29) e obter-se

$$\tilde{\Theta}_k = \begin{bmatrix} -\mathbf{Q}^{-1}(\alpha_k^+) & \hat{\mathbf{A}}_{\sigma_k}(\alpha_k)\mathbf{U} \\ \star & -\mathbf{U}^T \mathbf{Q}^{-1}(\alpha_k)\mathbf{U} \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (5.30)$$

Considerando a regularidade de  $\mathbf{U}$  e aplicando a transformada de congruência  $\Theta_k = \mathcal{T}^T \tilde{\Theta}_k \mathcal{T}$  com  $\mathcal{T} = \text{diag}\{\mathbf{I}, \mathbf{U}^{-1}\}$ , obtém-se

$$\Theta_k = \begin{bmatrix} -\mathbf{Q}^{-1}(\alpha_k^+) & \hat{\mathbf{A}}_{\sigma_k}(\alpha_k) \\ \star & -\mathbf{Q}^{-1}(\alpha_k) \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (5.31)$$

Aplicando a transformada de Schur em  $\Theta_k$ , tem-se

$$\Theta_k = \hat{\mathbf{A}}_{\sigma_k}^T(\alpha_k) \mathbf{Q}^{-1}(\alpha_k^+) \hat{\mathbf{A}}_{\sigma_k}(\alpha_k) - \mathbf{Q}^{-1}(\alpha_k) < \mathbf{0}. \quad (5.32)$$

Pré e pós-multiplicando  $\Theta_k$  por  $\xi_{k,\varphi}^T$  e  $\xi_{k,\varphi}$ , respectivamente, e a partir de (5.10)–(5.14), substitui-se  $\hat{\mathbf{A}}_{\sigma_k}(\alpha_k) \xi_{k,\varphi}$  por  $\xi_{k+1,\varphi}$ , obtendo-se

$$\Omega_k = \xi_{k+1,\varphi}^T \mathbf{Q}^{-1}(\alpha_{k+1}) \xi_{k+1,\varphi} - \xi_{k,\varphi}^T \mathbf{Q}^{-1}(\alpha_k) \xi_{k,\varphi} < 0. \quad (5.33)$$

Note que  $\Delta V(\varphi_k, \alpha_k) = \Omega_k < 0$  e, portanto, conclui-se que o resultado factível de (5.26) assegura a negatividade de  $\Delta V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k)$  e diante da



positividade de  $V(\varphi_{\bar{d},k}, \alpha_k)$  e o teorema de Lyapunov-Krasovskii (NICULESCU, 2001, Pag 31) e (FRIDMAN, 2014) assegura-se a estabilidade local do modelo fuzzy T-S (5.2)–(5.5) em malha fechada sob a lei de controle (5.7)–(5.8) com ganhos dados por (5.28) sempre que a trajetória dos estados evoluírem no interior do conjunto  $\mathcal{V}_0$ .

As desigualdades (5.27) estão provadas no Capítulo 3. Portanto, verificando-se essas LMIs, garante-se que  $\mathcal{L}_{V_1} \subseteq \mathcal{V}_0$  e para qualquer trajetória começando em  $\Upsilon_\varphi$  permanece em  $\mathcal{L}_{V_1}$  e, assim, a estabilidade local do sistema não linear (5.1) em malha fechada sob a lei de controle (5.7)–(5.8) com ganhos dados por (5.28) é assegurada. ■

### 5.3.1 Problema de otimização convexa

Considerando as idéias expostas nos capítulos anteriores sobre o objetivo de obter regiões de estabilidades estimadas,  $\Upsilon_\varphi$ , as maiores possíveis, considere a maximização de um conjunto elipsoidal incluso no conjunto de nível  $\mathcal{L}_{V_1}$  como se segue:

$$\mathcal{E}(W) = \{x \in \mathbb{R}^n; x^T W x \leq 1\} \subseteq \mathcal{L}_{V_1}. \quad (5.34)$$

Isso equivale a:

$$\begin{bmatrix} W & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & Q_i \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad i \in \mathcal{I}[1, N]. \quad (5.35)$$

Assim, um problema de otimização convexa é proposto como se segue:

$$\mathcal{P}_W \begin{cases} \min & \text{traço}(W) \\ \text{sujeito a} & (5.26), (5.27), \text{ e } (5.35). \end{cases} \quad (5.36)$$

### 5.3.2 Comparações complexidade numéricas

As condições propostas nesta tese como um todo podem ser resolvidas em tempo polinomial por *solvers* que utilizam métodos eficientes de pontos interiores. A complexidade numérica das soluções dessas condições desenvolvidas está associada ao número de linhas das LMIs,  $\mathcal{R}$ , e ao número de variáveis escalares,  $\mathcal{V}$ . Utilizando o *LMI Control Toolbox*, por exemplo, o número de operações de pontos flutuantes necessários para resolver uma LMI usando o LMIlab é proporcional a  $\mathcal{V}^3 \mathcal{R}$ .

(GAHINET et al., 1995). Esse é o método de métrica da complexidade numérica utilizado nesta tese. Diante disso, a complexidade numérica do problema de otimização (5.36) é

$$CN_{aum} = \left[ \frac{n(n+1)}{2}(N+1) + \frac{\bar{d}n(\bar{d}n+1)}{2} + ((\bar{d}+1)n)^2 + m(\bar{d}+1)nN \right]^3 (2n(\bar{d}+1) + 3n+1), \quad (5.37)$$

em que  $n$  representa no número de estados do sistema,  $\bar{d}$  o atraso máximo,  $m$  o número de entradas e  $N$  o número de vértices do modelo fuzzy T-S.

Para comparações, são apresentadas também as complexidades numéricas dos problemas de otimização (3.54) e (4.34), que são, respectivamente,

$$CN_{no1} = [n(n+1)N + 3n^2 + 2nmN]^3 (7n+1) \quad (5.38)$$

e

$$CN_{no2} = \left[ n(n+1)N + \frac{n(n+1)}{2} + 6n^2 + 2nmN \right]^3 (9n+1). \quad (5.39)$$

Para avaliar comparativamente as complexidades numéricas dos três problemas de otimização abordados neste momento, foram consideradas duas situações: *i)*  $n = 2$ ,  $m = 1$ ,  $N = 4$  e  $\bar{d} \in \mathcal{I}[1, 5]$ ; e *ii)*  $n = 2$ ,  $m = 1$ ,  $\bar{d} = 5$  e  $N \in \mathcal{I}[2, 4, 6, 8, 10]$ . Para uma melhor avaliação dos resultados foram consideradas as seguintes razões:  $CN_{aum}/CN_{o1}$  e  $CN_{aum}/CN_{o2}$ , para ambos os casos descritos. Com isso, obtém-se as figuras 14 e 15, sendo que na primeira é mostrada a comparação para o caso em que  $\bar{d}$  varia e na segunda é mostrada a comparação para o caso em que  $N$  varia. Observe que a complexidade numérica do problema de otimização (5.36) é sempre a maior e a complexidade numérica do problema de otimização (3.54) é a menor. Além disso, é possível perceber que a complexidade numérica do problema de otimização aqui proposto aumenta bastante com o aumento de  $\bar{d}$ . Isso é fácil de perceber, pois o aumento dessa variável não altera a complexidade numérica dos problemas de otimização propostos nos capítulos anteriores. Já para o aumento de  $N$  a razão entre as complexidades numéricas tendem a diminuir.

De toda forma, conclui-se que os resultados aqui propostos apresentam complexidade numérica bastante elevada quando comparadas

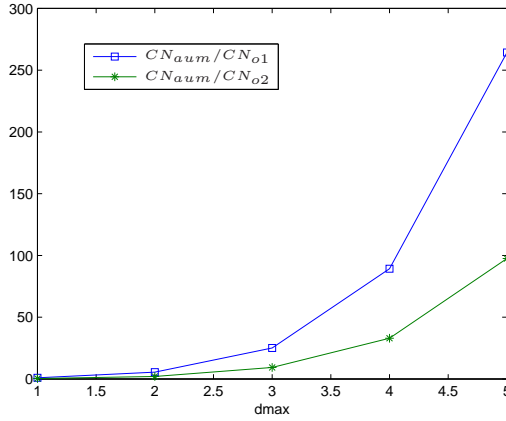


Figura 14 – Comparação complexidades numéricas em função de  $\bar{d}$ .

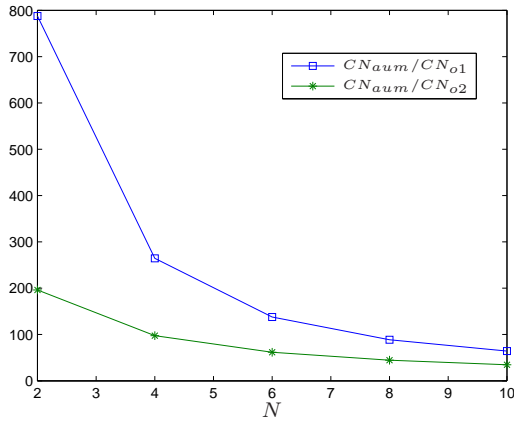


Figura 15 – Comparação complexidades numéricas em função de  $N$ .

com resultados propostos anteriormente. Esse pode não ser um grave problema, pois todas as condições propostas nesta tese são resolvidas off-line. Porém, isso pode se tornar um problema bastante custoso quando essa complexidade se torna tão elevada que seja necessário um computador de processamento extremamente potente para que seja possível encontrar soluções. Tornando-se assim inviável a utilização

dessa técnica quando se tem acesso a computadores com processamentos ditos normais para os padrões atuais.

## 5.4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nesta seção são apresentados os mesmos sistemas não lineares discretos no tempo com atraso nos estados apresentados no Capítulo 2. A partir disso, são feitas comparações entre os resultados apresentados aqui e nos capítulos anteriores.

### 5.4.1 Sistema acadêmico

Considere o sistema não linear discreto no tempo com atraso variante nos estados (2.18). A partir da representação fuzzy T-S desse sistema não linear via (5.2), tem-se que as matrizes do modelo fuzzy resultante são representadas por (2.25). Como já definido em capítulos anteriores nesses sistemas o atraso é variante no tempo e  $d_k \in \mathcal{I}[1, 5]$  e a região de validade  $\mathcal{V}_0$  é definida como

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \eta = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Assim como acontece na tentativa de obter soluções considerando  $c_1 = c_2 = 1$  a partir dos problemas de otimização (3.54), para a lei de controle  $u_k = K(\alpha_k)x_k$ , e (4.34), também não foi possível obter solução por meio de problema de otimização (5.36). Já considerando  $c_1 = 0.64$  e  $c_2 = 0.8$  foi possível obter solução a partir desse ultimo problema de otimização. De posse dos resultados obtidos pela utilização desse ultimo problema de otimização e do (3.54), são estimadas as regiões de estabilidade. Vale destacar que no Exemplo 4.4 do capítulo anterior já existe uma comparação para as regiões de estabilidade obtidas para o mesmo sistema aqui tratado Figura 10, utilizando as condições desenvolvidas no Capítulo 3 e no Capítulo 4. Diante disso, o interesse neste exemplo é analisar o desempenho das condições propostas neste capítulo frente as condições propostas no Capítulo 3, referentes à estabilização local, pois no Exemplo 4.4 mostrou-se que essas obtêm melhores resultados que as condições propostas no capítulo anterior, referentes ao problema de otimização (4.34). Portanto, na Figura 16 são apresentadas as regiões de estabilidade, sendo  $\mathcal{C}_{x2}$  relativa à solução de (3.54) e  $\mathcal{C}_{x1}$  relativa à solução de (5.36). As regiões de estabilidade

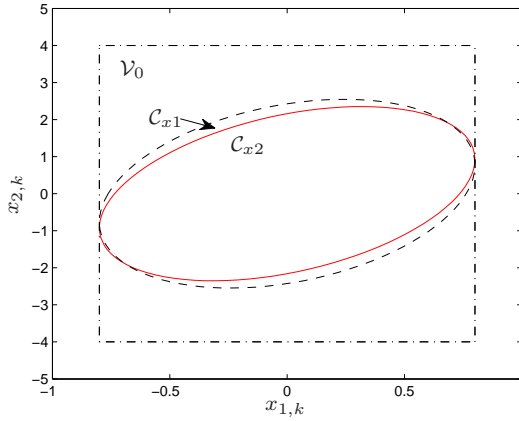


Figura 16 – Conjuntos  $\mathcal{V}_0$ ,  $\mathcal{C}_{x1}$  e  $\mathcal{C}_{x2}$ .

foram obtidas considerando  $[\phi_{5,0}]_j = [0 \ 0]^T$ ,  $j \in \mathcal{I}[1, 5]$ , o que resulta em  $\mathcal{B}_\phi = \{0\}$  e  $\mathcal{C}_x = \mathcal{L}_{V_1}$ .

A partir da análise das regiões apresentas na Figura 16 é possível perceber que  $\mathcal{C}_{x1}$  apresenta um tamanho maior que  $\mathcal{C}_{x2}$ . Para ser mais preciso, a área estimada para  $\mathcal{C}_{x1}$  é 6.0983, já para  $\mathcal{C}_{x2}$  é 5.4331. Sendo assim, observa-se que a área estimada para  $\mathcal{C}_{x1}$  é 12.24% maior que a área estimada para  $\mathcal{C}_{x2}$ , mostrando assim que as condições obtidas neste capítulo produzem resultados melhores do ponto de vista de otimização do tamanho da região de estabilidade que as condições desenvolvidas no Capítulo 3 e, por consequência, que as condições desenvolvidas no Capítulo 4.

### 5.4.2 Sistema com motivação prática

Considere novamente o exemplo do levitador magnético com atraso nos estados (2.27) apresentado no Capítulo 2. Por meio do modelo fuzzy T-S desse sistema, pode-se obter um modelo fuzzy T-S de estado aumentado e chaveado como mostrado em (5.10)–(5.15). Diante disso, o objetivo é a partir do problema de otimização (5.36) calcular os ganhos que compõe a lei de controle (5.7)–(5.8) de tal forma a se ter a maior região de estabilidade estimada  $\Upsilon_\varphi$  possível. Os ganhos

Tabela 4 – Comparação das condições dos capítulos 4 e 5

Prob. Otim.	$\rho$	Área estimada de $\mathcal{C}_x$ para $\ \phi_{5,0}\ _5 = 0$
(5.36)	2.593	0.0964
(3.54)	6.0475	0.0941
(4.34)	6.0893	0.0941

calculados foram os seguintes:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix} -24.0109 & -10.2983 & -0.0018 & -0.9013 & 0.0001 \\ -0.8848 & 0.0007 & -0.8682 & 0.0007 & -0.8610 & 0 & -0.8555 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{K}_2 &= \begin{bmatrix} -23.4019 & -10.2924 & -0.0016 & -0.9001 & 0.0001 \\ -0.8856 & 0.0007 & -0.8699 & 0.0007 & -0.8626 & 0 & -0.8547 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{K}_3 &= \begin{bmatrix} -33.8587 & -14.6151 & 0.0070 & -1.3091 & 0.0036 \\ -1.2879 & 0.0025 & -1.2704 & 0.0014 & -1.2572 & 0 & -1.2634 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{K}_4 &= \begin{bmatrix} -33.2195 & -14.6153 & 0.0066 & -1.3073 & 0.0035 \\ -1.2855 & 0.0025 & -1.267 & 0.0014 & -1.2541 & 0 & -1.2645 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

Além disso, foi obtido  $\rho = 2.593$ .

Para avaliar os resultados obtidos neste capítulo, comparam-se esses com os obtidos no Capítulo 4 e obtidos a partir da utilização do problema de otimização (3.54), com a lei de controle  $u_k = K(\alpha_k)x_k$ . Assim, foi montada a Tabela 4. Nessa tabela são apresentados os valores de  $\rho$  e uma estimativa dos valores das áreas das regiões  $\mathcal{C}_x$ . Para a determinação desses conjuntos  $\mathcal{C}_x$ , foi considerado que  $\|\phi_{5,0}\|_5 = 0$ , em ambos os casos, e assim, tem-se que o próprio  $\mathcal{C}_x$  representa a região de estabilidade.

Então, por meio dessa tabela, analisando os valores obtidos de  $\rho$ , tem-se que pela solução do problema de otimização (5.36) essa variável é aproximadamente 57.12% menor que a solução obtida pelo problema de otimização (3.54) e 57.42% menor que a solução obtida a partir do problema de otimização (4.34). Isso demonstra um ganho bastante significativo dos resultados aqui propostos em relação aos resultados apresentados nos capítulos anteriores, pois é desejável ter  $\rho$  sempre o menor possível. Fazendo a mesma análise para as áreas estimadas, tem-se que esse parâmetro obtido pela solução do problema de otimização (5.36) é aproximadamente 2.40% maior que o mesmo parâmetro encontrado pelos problemas de otimização (3.54) e (4.34). Esse também é um re-

sultado positivo para as condições propostas neste capítulo em relação as condições propostas nos capítulos anteriores.

Por meio das equações (5.37)–(5.39), é possível ter uma estimativa da complexidade numérica desse sistema a partir da utilização dos problemas de otimização (5.36), (3.54) e (4.34). Note que nas equações (5.37)–(5.39) tem-se:  $n = 2$ ,  $N = 4$ ,  $\bar{d} = 5$  e  $m = 1$ . Como desejasse comparar as complexidades numéricas dos problemas de otimização mencionados, neste exemplo é considerada a razão entre a complexidade numérica, assim como mostrado nas figuras 14 e 15. Diante disso, tem-se  $CN_{aum}/CN_{no1} = 264.3408$  e  $CN_{aum}/CN_{no2} = 97.5635$ . Isso mostra que a complexidade numérica do problema de otimização proposto neste capítulo é aproximadamente 264 vezes maior que a complexidade numérica do problema de otimização proposto no Capítulo 3, referente à estabilização local, e aproximadamente 97 vezes maior que a complexidade numérica do problema de otimização desenvolvido no Capítulo 4. Portanto, apesar do problema de otimização proposto neste capítulo fornecer valores de  $\rho$  menores e uma área estimada para a região de estabilidade maior que os problemas de otimização propostos em capítulos anteriores, a complexidade numérica daquele é muito maior que a complexidade numérica desses. Porém, essa desvantagem não é tão relevante para o sistema em questão visto que esses problemas de otimização são resolvidos off-lines.

Assumindo que as condições iniciais atrasadas são nulas, ou seja,  $[\phi_{5,0}]_j = [0 \ 0]^T$ ,  $j \in \mathcal{I}[1, 5]$ , isso resulta que  $\mathcal{B}_\phi = \{0\}$  e  $\mathcal{C}_x = \mathcal{L}_{V_1}$ . Diante disso, utilizou-se a lei de controle (5.7)–(5.8) com ganhos apresentados em (5.40) para realimentar o sistema não linear (2.27) e foi proposta sete condições iniciais estáveis, ou seja, sete condições iniciais pertencentes a região de estabilidade que aqui é representada somente pelo conjunto  $\mathcal{C}_x$ , pois foi considerado  $\mathcal{B}_\phi = \{0\}$ , e uma condição inicial que não pertence à região de estabilidade. Assim, chega-se na Figura 17, em que são apresentados o conjunto  $\mathcal{C}_x = \mathcal{L}_{V_1}$  (linha pontilhada) e as oito trajetórias resultantes das condições iniciais  $\varphi_{5,0} = \{\phi_{5,0}, x_0\} \in E_\varphi$ ,  $\phi_{5,0} \in E_\phi$ , e  $x_0 \in E_x$ , com  $[\phi_{5,0}]_j = [0 \ 0]^T$ ,  $j \in \mathcal{I}[1, 5]$  e  $x_0^i = [x_{1,0} \ x_{2,0}]^T$ , para  $i \in [1, 8]$ , sendo as trajetórias que convergem assintoticamente para origem marcadas por  $\times$  e a trajetória que convergem para um ponto de equilíbrio diferente da origem marcada por  $\circ$ . Na simulação utilizada para gerar as trajetórias foi considerado  $d_k = 3 - \text{round}(2 \cos(k))$ ,  $|x_{1,k}| \leq 0.05$  e se  $|x_{1,k}| = 0.05$ , então  $x_{2,k} = 0$  devido às restrições físicas do sistema. Note que todas as trajetórias estáveis são geradas a partir de condições iniciais localizadas no interior da região de estabilidade, como esperado, e a trajetória que não con-

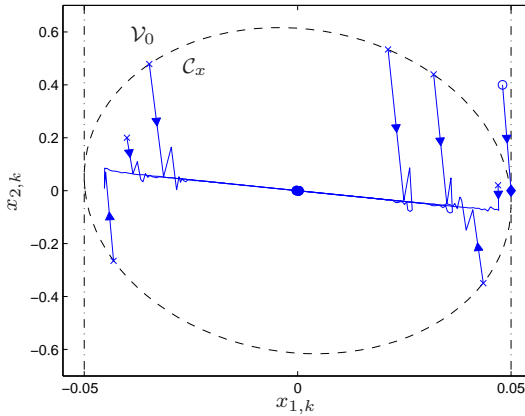


Figura 17 –  $\mathcal{V}_0$ ,  $\mathcal{C}_x$  e trajetórias que convergem para origem e uma que converge para um ponto de equilíbrio diferente da origem.

verge para a origem foi gerada pela condição inicial que não pertence à região de estabilidade. Diante disso, observa-se que não se pode garantir a convergência das trajetórias geradas por condições iniciais que não pertençam a região de estabilidade estimada.

## 5.5 CONCLUSÕES

Neste capítulo, foram apresentadas condições locais convexas dependentes do atraso para a síntese de controladores fuzzy T-S utilizados para estabilizar localmente sistemas não lineares discretos no tempo com atraso variante nos estados. As condições foram desenvolvidas baseadas em uma candidata à função fuzzy L-K e foram formuladas em termos de LMIs. A lei de controle proposta é a de realimentação de todos os vetores de estados do sistema, aqui representado por  $\xi_k$ . Considerou-se que o modelo fuzzy T-S representa exatamente o sistema não linear no interior da região de validade. Além disso, representou-se esse modelo fuzzy T-S com atraso variante nos estados por modelo fuzzy T-S de estado aumentado e chaveado em relação ao atraso. Em consequência de trabalhar-se com condições locais, estimou-se a região de estabilidade para o sistema não linear em malha fechada com o controlador fuzzy T-S sintetizado de tal forma que as trajetórias re-



sultantes de condições iniciais que pertençam a região de estabilidade sejam assintoticamente estáveis e, assim, convirjam assintoticamente para a origem do sistema em malha fechada. Foram caracterizados dois conjuntos para a estimação da região de estabilidade, sendo que um descreve a região de valores seguros para o vetor de estados atuais enquanto o outro define a região para os elementos das condições iniciais atrasadas. Por meio de um problema de otimização convexa proposto, pode-se computar os ganhos fuzzy para o controlador que maximizassem a região de estabilidade do sistema não linear em malha fechada com o controlador fuzzy T-S. Finalmente, apresentou-se exemplos para ilustrar os resultados propostos.

Vale destacar que a função L-K utilizada para o desenvolvimento das condições aqui propostas é quadrática em relação ao chaveamento do modelo aumentado. Portanto, uma extensão possível é obter condições baseadas em uma candidata à função L-K que seja dependente tanto da função de pertinência quanto do chaveamento. Isso resultaria em condições menos conservadoras, porém aumentaria bastante a complexidade numérica dessas condições. Outra extensão simples de ser realizada é a simplificação da lei de controle proposta neste capítulo, de tal forma que seja possível, por exemplo, recuperar leis de controles utilizadas anteriormente. Possivelmente, isso diminuiria a complexidade numérica, mas deixaria as condições mais conservadoras.



## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A utilização de modelos fuzzy para análise e síntese de sistemas de controle não lineares é motivada, principalmente, pelo fato de que esses modelos permitem a aplicação de ferramentas associadas à teoria de estabilidade de sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo. Mais especificamente, a modelagem via T-S permite obter uma representação para o sistema não linear sob a forma de um sistema linear dependente da função de pertinência e, portanto, dos estados do sistema não linear.

Assim, os modelos fuzzy T-S têm motivado o desenvolvimento de várias pesquisas na comunidade nacional e internacional, como a análise de estabilidade, síntese de controladores, síntese de controladores com especificação de desempenho, entre outras. Entretanto, é interessante notar que, em geral, um modelo fuzzy T-S representa de forma exata ou aproximada o sistema não linear a controlar somente no interior de uma região do espaço de estados, região na qual as propriedades de convexidade do modelo são preservadas e que foi denominada domínio de validade ou região de validade. Dessa forma, a utilização de uma lei de controle, projetada a partir do modelo fuzzy T-S, pode levar à degradação de desempenho e até mesmo à instabilidade do sistema não linear em malha fechada se suas trajetórias violarem a região de validade do modelo T-S.

Dentro do contexto brevemente descrito acima, foram estabelecidos como objetivos gerais deste trabalho: *i*) demonstrar a importância da região de validade do modelo fuzzy T-S, quando esse é utilizado em ferramentas de análise de estabilidade e síntese de controladores e os resultados obtidos são aplicados diretamente no sistema não linear que originou aquele modelo fuzzy T-S; e *ii*) desenvolver algoritmos para síntese de leis de controle para sistemas não lineares com atraso nos estados, representados por modelos fuzzy T-S, em que as regiões de validade desses modelos fuzzy são levadas em consideração.

Tendo em mente esses objetivos, descreveu-se no Capítulo 2 uma breve introdução à modelagem fuzzy T-S para sistemas com atraso e, visando mostrar alguns aspectos citados anteriormente, desenvolveram-se condições de estabilidade e estabilização global para um modelo fuzzy T-S com atraso constante. A seguir, por meio de exemplos numéricos, demonstrou-se que não havia garantias da estabilidade em todo o espaço de estados para o sistema não linear em malha fechada. Por último, foi proposta uma forma de adaptar essas condições para considerar a

estabilidade em malha fechada em um contexto local. Foi introduzido o conceito de estimação e maximização da região de estabilidade assintótica do sistema de controle. Nesse capítulo foram apresentadas também duas metodologias diferentes para caracterizar regiões de estabilidade assintóticas, sendo uma bastante utilizada em problemas de sistemas lineares com atraso nos estados e saturação do sinal de controle e a outra, proposta neste trabalho, em que é feita uma decomposição da sequência de condições iniciais o que resulta no tratamento separado de  $x_0$  e  $\phi_{\bar{a},0}$ . Assim, a partir de um exemplo numérico evidenciou-se o problema de violação da região de validade e por meio da revisão bibliográfica observou-se a lacuna existente na literatura em relação a essa questão. Além disso, foi possível verificar também que quando se tem informações prévias sobre a norma das condições iniciais atrasadas, principalmente quando essa norma é nula, o método de caracterização da região de estabilidade proposta neste trabalho produz resultados melhores do ponto de vista de tamanho de regiões quando comparado com o método utilizado na literatura de sistemas lineares com atraso nos estados e saturação no sinal de controle.

No Capítulo 3 foi considerada a utilização de um modelo fuzzy T-S que representa um sistema não linear com atraso variante. A partir das conclusões obtidas no Capítulo 2, no capítulo em questão foram desenvolvidas condições de estabilização local com o cálculo de uma região de estabilidade assintótica utilizando a metodologia de caracterização dessa região proposta nesta tese. Diante disso, foi considerada a decomposição do vetor de condições iniciais, sendo separado em duas partes: a primeira é referente somente à condição inicial em  $k = 0$ , ou seja, o primeiro termo da sequência, e a segunda é relativa à sequência de condições iniciais atrasadas. Assim, foram determinadas duas regiões: uma para tratar as condições iniciais em  $k = 0$ , e a outra para lidar com as condições iniciais atrasadas. A partir de exemplos numéricos foi possível verificar a eficiência das condições propostas. Além disso, nesse mesmo capítulo foram desenvolvidas condições de estabilização de sistemas não lineares discretos no tempo com atraso variante nos estados afetados por sinais de perturbação de energia limitada. Esses resultados foram formulados para garantir que um sistema não linear em malha fechada seja ISS e, portanto, que as trajetórias dos estados resultantes evoluam somente no interior da região de validade do modelo fuzzy T-S utilizado na etapa de projeto. Com isso, o cálculo da região positivamente invariante foi proposto por meio de um conjunto elipsoidal. A partir de um exemplo mostrou-se a importância de tratar sinais de perturbações quando se trabalha com resultados locais ao se

fazer comparações com resultados existentes na literatura.

Os resultados obtidos no Capítulo 4 são condições de síntese de controladores fuzzy T-S que estabilizam localmente sistemas não lineares discretos no tempo com atraso variante nos estados. A distinção entre as condições propostas nesse capítulo e as obtidas no Capítulo 3, referentes à estabilização local, está na lei de controle. Basicamente, para a utilização dos resultados apresentados no Capítulo 3 é necessário se ter informações em tempo real do valor do atraso variante nos estados. Já para a utilização dos resultados propostos no Capítulo 4 é necessário somente a informação do valor do atraso máximo. No exemplo numérico apresentado foram feitas comparações entre esses dois conjuntos de condições. Contudo, observou-se que os resultados propostos pelo Capítulo 3, que utilizam uma lei de controle na qual não é feita realimentação do vetor de estados atrasados, produziram melhores soluções do ponto de vista de tamanho das regiões de estabilidade estimadas do que os resultados propostos no Capítulo 4. Apesar disso, vale destacar que esses últimos resultados forneceram soluções melhores quando comparados com condições propostas na literatura. Além disso, destaca-se que esforços estão sendo feitos na tentativa de encontrar condições melhores e menos conservadoras.

A partir da caracterização de sistemas lineares discretos no tempo com atraso variante nos estados por sistemas discretos no tempo de estados aumentados e chaveados proposta por (HETEL; DAAFOUZ; IUNG, 2008), no Capítulo 5 foram desenvolvidas condições de síntese de controladores fuzzy T-S para estabilização de sistemas não lineares discretos no tempo com atraso variante nos estados. Para a utilização dessas condições, primeiramente, representa-se de forma exata o sistema não linear com atraso nos estados por modelos fuzzy T-S com atraso nos estados, sendo essa representação válida somente no interior da região de validade. Após isso, obtém-se o modelo fuzzy T-S de estado aumentado e chaveado que representa o modelo fuzzy T-S com atraso variante nos estados via metodologia apresentada em (HETEL; DAAFOUZ; IUNG, 2008). Assim, utiliza-se o modelo fuzzy T-S de estado aumentado e chaveado para obterem-se os ganhos da lei de controle fuzzy T-S que realimenta todos os estados do sistema não linear original. A partir de um exemplo numérico foi possível perceber que as condições propostas no Capítulo 5 produzem resultados menos conservadores que as condições propostas nos Capítulos 3 e 4, porém essas últimas apresentam complexidade numéricas bem menores que aquelas.

Diante do que está exposto, conclui-se que os objetivos principais foram alcançados, assim como os objetivos específicos também o

foram. Portanto, nesta tese foi proposta uma nova metodologia para caracterizar regiões de estabilidade para sistemas não lineares discretos no tempo com atraso variante no vetor de estados em malha fechada via controladores fuzzy T-S. Além disso, foram desenvolvidos três conjuntos de condições para síntese de controladores fuzzy T-S, como descrito nos parágrafos anteriores, sendo que em um desses considera-se a lei de controle de realimentação do vetor de estados atuais e o vetor de estados afetado pelo atraso variante no tempo; no outro a lei de controle realimenta o vetor de estados atuais e o vetor de estados com o atraso máximo; e para o último a lei de controle faz a realimentação de todos os estados do sistema original.

## 6.1 ARTIGOS PUBLICADOS E SUBMETIDOS

Nesta seção são apresentados os artigos já publicados e os submetidos que têm relações diretas com o trabalho desenvolvido no doutorado. A partir dos resultados obtidos foram publicados os seguintes artigos:

- (SILVA et al., 2012) apresenta resultados preliminares, em que obtêm-se condições de estabilização para sistemas não lineares representados por modelos fuzzy T-S com a região de estabilidade estimada como uma bola.
- (SILVA et al., 2014c) e (SILVA et al., 2014a) são resultados obtidos a partir de (SILVA et al., 2012). Em ambos os casos a forma de estimar a região de estabilidade é mais elaborada, sendo que a mesma é separada em duas partes: na primeira, tratam-se somente as condições iniciais para o instante  $k = 0$ ; e na segunda são tratadas as condições iniciais atrasadas. A diferença entre esses dois resultados está na função L-K utilizada, no segundo caso essa função é mais elaborada.
- Em (SILVA et al., 2014d) são apresentados resultados, em que condição de saturação do atuador são levadas em consideração.
- Já em (SILVA et al., 2014b) são apresentados resultados, em que a lei de controle considerada realimenta o estado com atraso máximo, além de realimentar o estado atual.
- Por fim, um artigo com a extensão dos resultados apresentados em (SILVA et al., 2014c), no qual consideram-se perturbações no

sistema de controle, foi aceito para ser publicado nos anais do *American Conference Control 2016* (ACC16) .

## 6.2 PROPOSTA PARA TRABALHOS FUTUROS

As propostas de trabalhos futuros podem ser separadas em duas partes: uma em que a extensão dos resultados aqui apresentados pode ser realizada de forma mais direta e a outra para os casos em que a obtenção dos resultados apresenta um certo grau de dificuldade. Para as extensões mais diretas, pode-se enumerar as seguintes:

1. A partir dos resultados apresentados no Capítulo 3, obter condições em que é feita a minimização de um ganho  $\ell_2$  de tal forma a minimizar o efeito de perturbações no sinal de saída do sistema não linear discreto no tempo com atraso variante nos estados em malha fechada com os controladores fuzzy T-S projetados;
2. Assim como feito no Capítulo 3, em que apresentam-se resultados de estabilização local  $\ell_2$ , fazer o mesmo para as condições propostas no Capítulo 4. Ou seja, a partir das condições desenvolvidas no Capítulo 4, desenvolver condições de síntese para estabilização local  $\ell_2$  de sistemas não lineares discretos no tempo com atraso variante nos estados e afetados por sinais de perturbações de energia limitada. Após isso, pode-se trabalhar para desenvolver condições de síntese com minimização do ganho  $\ell_2$  e, assim, seja possível atenuar o efeito de perturbações nos sinais de saída dos sistemas não lineares em malha fechada;
3. O mesmo descrito no item anterior pode ser feito para as condições desenvolvidas no Capítulo 5; e
4. Além disso, pode-se utilizar os resultados apresentados nos Capítulos 4 e 5 para desenvolver condições de síntese de controlador para estabilizar sistemas não lineares discretos no tempo com atraso variante nos estados e com saturação do sinal de controle.

Os resultados apresentados nos Capítulos 4 e 5 foram propostos para sistemas não lineares discretos no tempo com atraso variante nos estados em que não se tem a informação em tempo real desse atraso, mas sabe-se o valor máximo que o mesmo pode assumir. Diante disso, foram propostas leis de controle em que as informações do atraso máximo são utilizadas. Sabe-se também que os ganhos projetados para os controladores são dependentes da função de pertinência.

Diante disso, é interessante que essas leis propostas sejam utilizadas com funções de pertinência que não dependam do atraso variante no tempo. Caso isso aconteça, é necessário considerar que os ganhos não sejam dependentes dessas funções de pertinência. Uma alternativa para tratar esse problema é projetar controladores chaveados, sendo que essa extensão não é direta como as descritas anteriormente. Algo nesse sentido já foi proposto por (DE SOUZA et al., 2013, 2014), em que são projetados ganhos para a lei de controle chaveado para sistemas fuzzy T-S contínuos no tempo e sem atraso nos estados.

Uma outra alternativa para tratar o problema relatado no parágrafo anterior seria propor funções de pertinências nas leis de controle diferentes das funções de pertinência dos modelos fuzzy T-S. Resultados sobre isso podem ser vistos em (LAM, 2011; LAM; NARIMANI, 2010). Em uma breve análise via observação dos resultados propostos por esses trabalhos e até mesmo por adaptação das condições propostas nesta tese, conclui-se que a utilização de diferentes funções de pertinência no controlador tornam os resultados bastante conservadores e aumenta-se também bastante a complexidade numérica das soluções. Já os resultados com a lei de controle chaveada mostram-se bastante promissores.

Nesta tese foi proposta uma forma de caracterizar a região de estabilidade, que produziu bons resultados quando comparados com as formas de caracterização encontradas na literatura. Diante disso, percebe-se que esforços para desenvolver novos procedimentos de caracterização de regiões de estabilidade são válidos, sendo esse um tema a ser também explorado em trabalhos futuros.



## REFERÊNCIAS

ANDREA, C. Q. et al. Controle ótimo  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas não-lineares com modelos fuzzy Takagi-Sugeno. **Revista Controle & Automação**, v. 19, n. 3, p. 256–269, Julho, Agosto e Setembro 2008.

ARIÑO, C. et al. Polytopic invariant and contractive sets for closed-loop discrete fuzzy systems. **Journal of the Franklin Institute**, v. 351, n. 7, p. 3559–3576, July 2014.

BENDER, F. A.; GOMES DA SILVA JR., J. M.; TARBOURIECH, S. A convex framework for the design of dynamic anti-windup for state-delayed systems. In: **ACC**. Baltimore, MD, USA: [s.n.], 2010. p. 6763–6768.

BOYD, S. et al. **Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory**. Philadelphia, PA: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.

CALDEIRA, A. F. et al. Minimização do custo  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas incertos discretos no tempo com atraso nos estados. **Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica**, v. 22, n. 3, p. 256–272, Maio e Junho 2011.

CHEN, B. et al. Robust  $\mathcal{H}_\infty$  control of Takagi-Sugeno fuzzy systems with state and input time delays. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 160, n. 4, p. 403–422, February 2009.

CHIU, C. S.; CHIANG, T. S. Robust output regulation of T-S fuzzy systems with multiple time-varying state and input delays. **IEEE Trans. on Fuzzy Systems**, v. 17, n. 4, p. 962–975, August 2009.

CHOI, H. H. Robust stabilization of uncertain fuzzy-time-delay systems using sliding-mode-control approach. **IEEE Trans. on Fuzzy Systems**, v. 18, n. 5, p. 979–984, October 2010.

DE OLIVEIRA, M. C.; SKELTON, R. E. Stability tests for constrained linear systems. **Perspectives in Robust Control**, v. 268, p. 241–257, 2001. Lectures Notes in Control and Information Sciences.

DE SOUZA, C. E.; COUTINHO, D. Stabilization of quadratic time-delay systems with a guaranteed region of stability. In:

**Preprints of the 10-th IFAC Workshop on Time Delay Systems.** Boston, USA: [s.n.], 2012. p. 25–30.

DE SOUZA, W. A. et al. Projeto de controle chaveado robusto para sistemas descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno. In: **XI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente**. Fortaleza - CE: [s.n.], 2013.

DE SOUZA, W. A. et al. Robust switched control design for nonlinear systems using fuzzy models. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2014, p. 11 pages, 2014.

DEY, R. et al. Improved delay-dependent stabilization of time-delay systems with actuator saturation. **Int. Journal of Robust and Nonlinear Control**, November 2012.

DONG, J.; YANG, G. H. Control synthesis of T-S fuzzy systems based on a new control scheme. **IEEE Trans. on fuzzy systems**, v. 19, n. 2, p. 323–338, April 2011.

FENG, G. A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems. **IEEE Trans. on Fuzzy Systems**, v. 14, n. 5, p. 676–697, October 2006.

FENG, G. **Analysis and Synthesis of Fuzzy Control Systems: A Model-Based Approach**. Hong Kong: CRC Press, 2009.

FRIDMAN, E. **Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control**. 1. ed. [S.l.]: Birkhäuser Basel, 2014. (Systems & Control: Foundations & Applications).

GAHINET, P. et al. **LMI control toolbox user's guide**. Natick, MA: The MathWorks, Inc, 1995.

GAO, H.; LIU, X.; LAM, J. Stability analysis and stabilization for discrete-time fuzzy systems with time-varying delay. **IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics – Part B**, v. 39, n. 2, p. 306–317, April 2009.

GAO, Q. et al. Universal fuzzy models and universal fuzzy controllers based on generalized T-S fuzzy models. In: **IEEE World Congress on Computational Intelligence**. Brisbane, Australia: [s.n.], 2012.

GASSARA, H.; HAJJAJI, A. E.; CHAABANE, M. Robust control of T-S fuzzy systems with time-varying delay using new approach. **Int.**

**Journal of Robust and Nonlinear Control**, v. 20, n. 14, p. 1566–1578, September 2010.

GEROMEL, J. C.; KOROGUI, R. H.; BERNUSSOU, J.  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  robust output feedback control for continuous time polytopic systems. **IET Control Theory Appl.**, v. 1, n. 5, p. 1541–1549, September 2007.

GHAOUI, L. E.; NICULESCU, S. I. Advances in linear matrix inequality methods in control. In: \_\_\_\_\_. California, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000. cap. Robust Decision Problems in Engineering: A Linear Matrix Inequality Approach, p. 3–37.

GHIGGI, I. et al. Estabilização de sistemas discretos com atrasos variantes no tempo e saturação nos atuadores. In: **XVII CBA**. Juiz de Fora, MG, Brasil: [s.n.], 2008.

GOMES DA SILVA JR., J. M.; LEITE, V. J. S. Enciclopédia de automática - controle & automação. In: \_\_\_\_\_. São Paulo, SP: Editora Blücher, 2007. cap. Sistemas Lineares com Atrasos de Tempo, p. 108–123.

GOMES DA SILVA JR., J. M. et al. Static anti-windup design for a class of nonlinear systems. **Int. Journal of Robust and Nonlinear Control**, v. 24, n. 5, p. 793–810, 2014.

GRÜNE, L.; KELLETT, C. M. ISS-Lyapunov functions for discontinuous discrete-time systems. **IEEE Trans. on Automatic Control**, v. 59, n. 11, p. 3098–3103, November 2014.

GU, K.; KHARITONOV, V. L.; CHEN, J. **Stability of Time-delay Systems**. Boston: Birkhäuser, 2003. (Control Engineering).

GUERRA, T. M.; KRUSZEWSKI, A.; LAUBER, J. Discrete Tagaki-Sugeno models for control: Where are we? **Annual Reviews in Control**, v. 33, n. 1, p. 37–47, April 2009.

HAO, F.; ZHAO, X. New delay-dependent stability conditions for discrete-time systems with time-varying delay in the state. **IMA Journey of Mathematical Control and Information**, v. 27, n. 3, p. 253–266, July 2010.

HETEL, L.; DAAFOUZ, J.; IUNG, C. Equivalence between the Lyapunov-Krasovskii functionals approach for discrete delay systems

and that of the stability conditions for switched systems. **Nonlinear Analysis: Hybrid Systems**, v. 2, p. 697–705, 2008.

HU, T.; LIN, Z. **Control Systems with Actuator Saturation: Analysis and Design**. [S.l.]: Birkhäuser Boston, 2001. (Control Engineering). ISBN 9780817642198.

JUNGERS, M.; CASTELAN, E. B. Gain-scheduled output control design for a class of discrete-time nonlinear systems with saturating actuators. **Systems & Control Letters**, v. 60, n. 3, p. 315–325, March 2011.

KELLETT, C. M. A compendium of comparison function results. **Math. Control Signals Syst.**, v. 26, p. 339–374, 2014.

KHAIRY, M.; ELSHAFEI, A. L.; EMARA, H. M. LMI based design of constrained fuzzy predictive control. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 161, n. 6, p. 893–918, March 2010.

KIM, S. H. Improved approach to robust  $\mathcal{H}_\infty$  stabilization of discrete-time T-S fuzzy systems with time-varying delays. **IEEE Trans. on Fuzzy Systems**, v. 18, n. 5, p. 1008–1015, October 2010.

KLUG, M.; CASTELAN, E. B. Redução de regras e compensação robusta para sistemas Takagi-Sugeno com utilização de modelos não lineares locais. In: **X SBAI – Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente**. São João Del Rey–MG: [s.n.], 2011. p. 909–914.

KLUG, M.; CASTELAN, E. B. Compensadores dinâmicos para sistemas discretos no tempo com parâmetros variantes e aplicação a um sistema fuzzy Takagi-Sugeno. **Sba Controle & Automação**, v. 23, n. 5, p. 517–529, Setembro e Outubro 2012.

KLUG, M. et al. Fuzzy dynamic output feedback control through nonlinear takagi-sugeno models. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 263, p. 92–111, March 2015.

LAM, H. K. LMI-based stability analysis for fuzzy-model-based control systems using artificial T-S fuzzy model. **IEEE Trans. on Fuzzy Systems**, v. 19, n. 3, p. 505–513, June 2011.

LAM, H. K.; NARIMANI, M. Quadratic-stability analysis of fuzzy-model-based control systems using staircase membership functions. **IEEE Trans. on Fuzzy Systems**, v. 18, n. 1, p. 125–137, February 2010.

LEE, D. H.; JOO, Y. H. A new fuzzy Lyapunov function for relaxed stability condition of continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy systems. **IEEE Trans. on Fuzzy Systems**, v. 19, n. 4, p. 785–791, August 2011.

LEE, D. H.; PARK, J. B.; JOO, Y. H. Further improvement of periodic control approach for relaxed stabilization condition of discrete-time Takagi-Sugeno fuzzy systems. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 174, n. 1, p. 50–65, July 2011.

LEITE, V. J. S.; MIRANDA, M. F. Robust stabilization of discrete-time systems with time-varying delay: An LMI approach. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2008, p. 15 pages, 2008.

LEITE, V. J. S.; TARBOURIECH, S.; PERES, P. L. D. Robust  $\mathcal{H}_\infty$  state feedback control of discrete-time systems with state delay: an LMI approach. **IMA Journal of Mathematical Control and Information**, v. 26, n. 3, p. 357–373, August 2009.

LIU, Z. et al. Stabilization analysis for discrete-time systems with time delay. **Applied Mathematical and Computation**, v. 216, n. 7, p. 2024–2035, June 2010.

MARQUEZ, H. J. **Nonlinear control systems**. USA: John Wiley & Sons, 2003.

MIRANDA, M. F.; LEITE, V. J. S.; CALDEIRA, A. F. Robust stabilization of polytopic discrete-time systems with time-varying delay in the states. In: **Proc. 49th IEEE Conf. Decision Contr.** Atlanta, GA: [s.n.], 2010. p. 152–157.

MOZELLI, L. A.; SOUZA, F. O.; PALHARES, R. M. A new discretized Lyapunov-Krasovskii functional for stability analysis and control design of time-delayed T-S fuzzy systems. **Int. Journal of Robust and Nonlinear Control**, v. 21, n. 1, p. 93–105, January 2011.

NICULESCU, D. S. **Delay effects on stability: a robust control approach**. Germany: Springer, 2001.

OLIVEIRA, M. Z. et al. Design of anti-windup compensators for a class of nonlinear control systems with actuator saturation. **Journal of Control, Automation and Eletrical Systems**, v. 3, n. 24, p. 212–222, 2013.

OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Tutoriais *xviii* congresso brasileiro de automática. In: \_\_\_\_\_. [S.l.]: Cultura Acadêmica Editora, 2010. cap. Análise e Controle de Sistemas Lineares por meio de Desigualdades Matriciais Lineares, p. 203–227.

PAN, J.-T. et al. Nonquadratic stabilization of continuous T-S fuzzy models: LMI solution for a local approach. **IEEE Trans. on Fuzzy Systems**, v. 20, n. 3, p. 594–602, June 2012.

PARK, P.; LEE, S. S.; CHOI, D. J. State-feedback stabilization for nonlinear time-delay systems: a new approach weighting-dependent Lyapunov-Krasovskii functional approach. In: **Proc. of the 42nd IEEE CDC**. Maui, Hawaii USA: [s.n.], 2003. p. 5233–5238.

PENG, C.; YUE, D.; TIAN, Y. C. New approach on robust delay-dependent  $\mathcal{H}_\infty$  control for uncertain T-S fuzzy systems with interval time-varying delay. **IEEE Trans. on Fuzzy Systems**, v. 17, n. 4, p. 890–900, August 2009.

PITARCH, J. L. et al. Local fuzzy modeling: maximising the basin of attraction. In: **2010 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)**. Barcelona, Spain: [s.n.], 2010. p. 1–7.

RICHARD, J. P. Time-delay systems: An overview of some recent advances and open problems. **Automatica**, v. 39, p. 1667–1694, April 2003.

SILVA, L. F. P. et al. Síntese convexa de controladores fuzzy para sistemas takagi-sugeno discretos no tempo com atraso e limitação nos estados. In: **Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática, CBA**. Campina Grande, Pb, Brasil: [s.n.], 2012. p. 3282–3287.

SILVA, L. F. P. et al. Delay-dependent local stabilization of nonlinear discrete-time system using T-S models through convex optimization. In: **2014 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)**. Beijing, China: [s.n.], 2014.

SILVA, L. F. P. et al. Local stabilization of nonlinear discrete-time system with uncertain time-delay using T-S models. In: **Anais do XX Congresso Brasileiro de Automática, CBA**. Belo Horizonte, MG, Brasil: [s.n.], 2014. p. 2246–2252.

SILVA, L. F. P. et al. Local stabilization of time-delay nonlinear discrete-time systems using Takagi-Sugeno models and convex

- optimization. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2014, p. 10 pages, 2014.
- SILVA, L. F. P. et al. Stabilization of time-delay nonlinear discrete-time systems with saturating actuators through T-S models. In: **Proceedings of the 19th IFAC World Congress**. Cape Town, South Africa: [s.n.], 2014.
- SONTAG, E. D.; WANG, Y. On characterizations of the input-to-state stability property. **Systems & Control Letters**, v. 24, p. 351–359, 1995.
- STOJANOVIĆ, S. B.; DEBELJKOVIĆ, D. L.; MLADENOVIĆ, I. A Lyapunov-Krasovskii methodology for asymptotic stability of discrete time delay systems. **Serbia Journal of Electrical Engineering**, v. 4, n. 2, p. 109–117, November 2007.
- SUNG, H. C. et al. Robust digital implementation of fuzzy control for uncertain systems and its application to active magnetic bearing system. **Int. Journal of Control, Aut., and Systems**, v. 10, n. 3, p. 603–612, June 2012.
- TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. **IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics**, v. 15, n. 1, p. 116–132, January/February 1985.
- TANAKA, K.; WANG, H. O. **Fuzzy control systems design and analysis: A linear matrix inequality approach**. New York: John Wiley & Sons, 2001.
- TANIGUCHI, T. et al. Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems. **IEEE Trans. on Fuzzy Systems**, v. 9, n. 4, p. 525–538, August 2001.
- TARBOURIECH, S. et al. **Stability and satbilization of linear systems with saturating actuators**. [S.l.]: Springer, 2011.
- TEIXEIRA, M. C. M.; ZAK, S. H. Stabilization controller design for uncertain nonlinear systems using fuzzy models. **IEEE Trans. on Fuzzy Systems**, v. 7, n. 2, p. 133–142, April 1999.
- TIAN, E.; YUE, D.; ZHANG, Y. Delay-dependent robust  $\mathcal{H}_\infty$  control for T-S fuzzy system with interval time-varying delay. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 160, n. 12, p. 1708–1719, June 2009.

TOGNETTI, E. S.; OLIVEIRA, V. A. Fuzzy pole placement based on piecewise Lyapunov functions. **Int. Journal of Robust and Nonlinear Control**, v. 20, n. 5, p. 571–578, March 2010.

VANANTWERP, J. G.; BRAATZ, R. D. A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities. **Journal of Process Control**, v. 10, p. 363–385, August 2000.

VIANA, D. C.; LEITE, V. J. S.; MIRANDA, M. F. Fuzzy control of delayed systems: less conservative convex conditions. In: **Proc. of the 2010 ACC**. Baltimore, MY, USA: [s.n.], 2010. p. 6480–6485.

WANG, M.; GU, Y.; LI, X. Further control synthesis for time-delay systems with actuator saturation. **Journal Control Theory Application**, v. 11, n. 1, p. 128–131, 2013.

WU, H.; LI, H.-X. New approach to delay-dependent stability analysis and satbilization for continuous-time fuzzy systems with time-varying delay. **IEEE Trans. on Fuzzy Systems**, v. 15, n. 3, p. 482–493, June 2007.

WU, H.-N. Delay-dependent stability analysis and stabilization for discrete-time fuzzy systems with state delay: a fuzzy Lyapunov-Krasovskii functional approach. **IEEE Trans. on Systems and Cybernetics**, v. 36, n. 4, p. 954–962, August 2006.

WU, J. et al. Robust  $\mathcal{H}_\infty$  tracking control of boiler-turbine systems. **ISA Transactions**, v. 49, n. 3, p. 369–375, March 2010.

WU, L. et al. Model approximation for discrete-time state-delay systems in the T-S fuzzy framework. **IEEE Trans. on Fuzzy Systems**, v. 19, n. 2, p. 366–378, April 2011.

WU, L. et al. A new approach to stability analysis and stabilization of discrete-time T-S fuzzy time-varying delay systems. **IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics – Part B**, v. 41, n. 1, p. 273–286, February 2011.

WU, L. et al. Stability analysis and controller synthesis for discrete-time delayed fuzzy systems via small gain theorem. **Information Sciences**, v. 41, n. 1, p. 273–286, February 2013.

WYLIE, C. R.; BARRET, L. C. **Advanced Engineering Mathematics**. 6th. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 1995.



XIA, Z.; LI, J.; LI, J. Delay-dependent fuzzy static output feedback control for discrete-time fuzzy stochastic systems with distributed time-varying delays. **ISA Transactions**, v. 51, n. 6, p. 702–712, November 2012.

YANG, Z.; YANG, Y. New delay-dependent stability analysis and synthesis of T-S fuzzy systems with time-varying delay. **Int. Journal of Robust and Nonlinear Control**, v. 20, n. 3, p. 313–322, February 2012.

ZHANG, B.; XU, S. Delay-dependent robust  $\mathcal{H}_\infty$  control for uncertain discrete-time fuzzy systems with time-varying delays. **IEEE Trans. on Fuzzy Systems**, v. 17, n. 4, p. 809–823, August 2009.

ZHANG, H.; DANG, C. Piecewise  $\mathcal{H}_\infty$  controller design of uncertain discrete-time fuzzy systems with time delays. **IEEE Trans. on Fuzzy Systems**, v. 16, n. 6, p. 1649–1655, December 2008.

ZHANG, H.; ZHONG, H.; DANG, C. Delay-dependent decentralized  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for discrete-time nonlinear interconnected systems with time-varying delay based on the t-s fuzzy model. **IEEE Trans. on Fuzzy Systems**, v. 20, n. 3, p. 431–443, June 2012.

ZHANG, J.; SHI, P.; XIA, Y. Robust adaptative sliding-mode control for fuzzy systems with mismatched uncertainties. **IEEE Trans. on Fuzzy Systems**, v. 18, n. 4, p. 700–711, August 2010.

ZHANG, X.; LU, G.; ZHENG, Y. Stabilization of networked stochastic time-delay fuzzy systems with data dropout. **IEEE Trans. on Fuzzy Systems**, v. 16, n. 3, p. 798–807, June 2008.

ZHANG, X. et al. Robust stability of impulsive Takagi-Sugeno fuzzy systems with parametric uncertainties. **Information Sciences**, v. 181, n. 23, p. 5278–5290, December 2011.



## APÊNDICE A – Ferramentas



## A.1 DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES – LMIS

Com o desenvolvimento de métodos de pontos interiores para problemas de programação semidefinida, SDP (do inglês *semidefinite programming problem*), desigualdades matriciais lineares, LMIs (do inglês *linear matrix inequalities*), têm sido uma ferramenta útil para resolução de problemas de controle. A ideia básica do método de LMIs é expressar o problema dado como um SDP. A formulação de LMIs é relevante por várias razões. Uma dessas razões é que escrevendo um dado problema nessa forma, as soluções numéricas podem ser encontradas de forma eficiente (BOYD et al., 1994) (GHAOUI; NICULESCU, 2000).

Uma desigualdade matricial linear tem a seguinte forma:

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \mathbf{F}_0 + \sum_i^m \mathbf{p}_i \mathbf{F}_i > \mathbf{0} \quad (\text{A.1})$$

em que  $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^m$ , para  $i \in \mathcal{I}[1, m]$ , são variáveis escalares a serem determinadas e  $\mathbf{F}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , para  $i \in \mathcal{I}[0, m]$  são matrizes simétricas precisamente conhecidas. A desigualdade significa que  $\mathbf{F}(\mathbf{p})$  é uma matriz definida positiva, ou seja,

$$\mathbf{z}^T \mathbf{F}(\mathbf{p}) \mathbf{z} > \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{z} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \quad (\text{A.2})$$

Isso significa que  $\mathbf{F}(\mathbf{p})$  é uma função afim dos elementos de  $\mathbf{p}$ , que representa um vetor  $\mathbf{p} \in \mathcal{I}[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_m]$ .

A equação (A.1) é uma LMI estrita. No caso em que  $\mathbf{F}(\mathbf{p})$  é semidefinida positiva, essa seria uma LMI não estrita. A LMI estrita é factível quando existe um vetor  $\mathbf{p}$  que torna a desigualdade verdadeira, ou seja,  $\mathbf{F}(\mathbf{p})$  uma matriz definida positiva. Uma LMI não estrita factível pode ser reduzida para o caso de uma LMI estrita factível equivalente. Isso pode ser feito acrescentando um valor constante à matriz  $\mathbf{F}(\mathbf{p})$ , tornando essa matriz definida positiva, ou seja,  $\mathbf{F}(\mathbf{p}) + \epsilon \mathbf{I} > \mathbf{0}$ .

Uma LMI pode ser reescrita em termos de um conjunto de desigualdades escalares. De forma mais específica, considere a LMI (A.1), ela é equivalente a  $n$  desigualdades polinomiais. Para exemplificar, considere  $\mathbf{P} > \mathbf{0}$  e  $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} < \mathbf{0}$ , que são LMIs, na qual

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

As desigualdades podem ser escritas em termos das incógnitas do pro-

blema,  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$ , assim

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} > 0 \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} p_1 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} p_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} p_3 > 0 \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} A^T P A - P = & \begin{bmatrix} a^2 p_1 + 2acp_2 + c^2 p_3 & abp_1 + (ad + bc)p_2 + cdp_3 \\ abp_1 + (ad + bc)p_2 + cdp_3 & b^2 p_1 + 2bdp_2 + d^2 p_3 \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{bmatrix} p_1 + \begin{bmatrix} 2ac & bc + ad \\ ad + bc & 2bd \end{bmatrix} p_2 + \begin{bmatrix} c^2 & cd \\ cd & b^2 \end{bmatrix} p_3 < 0 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Observe que no exemplo dado a matriz  $F_0$  é nula. De acordo com (WYLIE; BARRET, 1995, pag 951) e (VANANTWERP; BRAATZ, 2000), as restrições podem ser colocadas em termos dos menores principais líderes de  $P$  e de  $A^T P A - P$ , resultando em

$$\begin{aligned} & \bullet p_1 > 0, p_3 > 0, p_1 p_3 - p_2^2 > 0, \\ & \bullet a^2 p_1 + 2acp_2 + c^2 p_3 < 0, b^2 p_1 + 2bdp_2 + d^2 p_3 < 0, (a^2 p_1 + 2acp_2 + c^2 p_3)(b^2 p_1 + 2bdp_2 + d^2 p_3) - (abp_1 + (ad + bc)p_2 + cdp_3)^2 < 0 \end{aligned}$$

É interessante salientar que, ao se representar uma LMI por um conjunto  $\mathbf{n}$  de desigualdades polinomiais caso  $\mathbf{n} > 1$ , esses polinômios serão não lineares, como acontece no exemplo dado acima.

Uma importante propriedade das LMIs é a convexidade, ou seja, o conjunto de soluções  $\mathbf{x}$  que atende a desigualdade é convexo. Em um problema de otimização convexa, o mínimo local encontrado é o mínimo global. Isso torna a solução do problema simples do ponto de vista de otimização. Um conjunto  $\mathcal{C}$  é convexo se  $\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in \mathcal{C}$  para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{C}$  e  $\lambda \in [0 \ 1]$ .

## A.2 COMPLEMENTO DE SCHUR

Considere a matriz quadrada simétrica  $\mathbf{X}$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

O complemento de Schur pode ser usado na caracterização da positividade de  $\mathbf{X}$ , com as seguintes propriedades:

- $\mathbf{X} > \mathbf{0}$  se e somente se  $\mathbf{A} > \mathbf{0}$  e  $\mathbf{C} - \mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} > \mathbf{0}$ ;
- $\mathbf{X} > \mathbf{0}$  se e somente se  $\mathbf{C} > \mathbf{0}$  e  $\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}^T > \mathbf{0}$ ;
- se  $\mathbf{A} > \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$  se e somente se  $\mathbf{C} - \mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \geq \mathbf{0}$ ;
- se  $\mathbf{C} > \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$  se e somente se  $\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}^T \geq \mathbf{0}$ .

A matriz  $\mathbf{C} - \mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$  é chamada de complemento de Schur de  $\mathbf{X}$  em relação a  $\mathbf{A}$  se  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ . Se  $\det(\mathbf{C}) \neq 0$ ,  $\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}^T$  é o complemento de Schur de  $\mathbf{X}$  em relação a  $\mathbf{C}$ . Manipulações envolvendo o complemento de Schur permitem transformar desigualdades convexas não lineares, que regularmente aparecem em problemas de controle, em LMIs (VANANTWERP; BRAATZ, 2000), (OLIVEIRA; PERES, 2010).

*Prova:* A partir da transformação de congruência, caso exista  $\mathbf{A}^{-1}$ , tem-se

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{C} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{T}}^T} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} - \mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{T}}} \quad (\text{A.7})$$

Como  $\tilde{\mathbf{T}}$  é uma matriz não singular

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{C} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} - \mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (\text{A.8})$$

Analogamente, se existe  $\mathbf{C}^{-1}$  existe,

$$\begin{aligned} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{C} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B} \mathbf{C}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{C} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (\text{A.10})$$

■

### A.3 LEMA DE FINSLER

O Lema de Finsler pode ser usado para expressar condições de estabilidade em termos de desigualdades matriciais equivalentes, introduzindo ou eliminando variáveis (OLIVEIRA; PERES, 2010). Como esse Lema tem sido utilizado frequentemente em teoria de controle para eliminar variáveis, ele também é conhecido como Lema da Eliminação (BOYD et al., 1994). A seguir está enunciado o Lema.

**Lema A.1 (Lema de Finsler)** *Sejam  $\varphi \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{Q}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , simétrica, e  $\mathcal{B}(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\alpha : \sum_i = 1^N \alpha_i = 1$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $i \in \mathcal{I}[1, N]$ , tal que o Posto( $\mathcal{B}(\alpha)$ )  $< n$ . As seguintes afirmativas são equivalentes:*

- 1.i)  $\varphi^T \mathcal{Q}(\alpha) \varphi < 0$ ,  $\forall \varphi : \mathcal{B}(\alpha) \varphi = 0$ ,  $\varphi \neq 0$
- 2.ii)  $\mathcal{B}^\perp(\alpha)^T \mathcal{Q}(\alpha) \mathcal{B}^\perp(\alpha)$ , em que  $\mathcal{B}^\perp(\alpha)$  denota uma base para o espaço nulo de  $\mathcal{B}(\alpha)$
- 3.iii)  $\exists \mu(\alpha) \in \mathbb{R}_+ : \mathcal{Q}(\alpha) - \mu \mathcal{B}(\alpha)^T \mathcal{B}(\alpha) < 0$
- 4.iv)  $\exists \mathcal{X}(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times m} : \mathcal{Q}(\alpha) + \mathcal{X}(\alpha) \mathcal{B}(\alpha) + \mathcal{B}(\alpha)^T \mathcal{X}(\alpha)^T < 0$

*Prova:* A prova do Lema de Finsler é baseada na demonstração apresentada em (DE OLIVEIRA; SKELTON, 2001), para o caso exato. Verifica-se  $i) \Leftrightarrow ii)$ , pois todo  $x$  tal que  $\mathcal{B}(\alpha)x = 0$  e, consequentemente,  $i) \Rightarrow y^T \mathcal{B}^\perp(\alpha)^T \mathcal{Q}(\alpha) \mathcal{B}^\perp(\alpha) y < 0$ , para todo  $y \neq 0 \Rightarrow \mathcal{B}^\perp(\alpha)^T \mathcal{Q}(\alpha) \times \mathcal{B}^\perp(\alpha) < 0$ . Por outro lado, assumindo que  $ii)$  é verificada, multiplique o lado esquerdo dessa condição, à direita por  $y \neq 0$  e à esquerda por  $y^T$  para obter  $i)$ .

Multiplique o lado esquerdo de  $iii)$  ou  $iv)$  à direita por  $\mathcal{B}^\perp(\alpha)$  e à esquerda por  $\mathcal{B}^\perp(\alpha)^T$  para obter  $ii)$ . Assumindo que  $ii)$  é verificada, a condição  $iii)$  pode ser recuperada como segue: fator  $\mathcal{B}(\alpha)$  em um produto de matrizes de posto completo,  $\mathcal{B}(\alpha) = \mathcal{B}_\ell(\alpha) \mathcal{B}_r(\alpha)$ , defina  $\mathcal{W}(\alpha) = \mathcal{B}_r(\alpha)^T (\mathcal{B}_r(\alpha) \mathcal{B}_r(\alpha)^T)^T (\mathcal{B}_\ell(\alpha)^T \mathcal{B}_\ell(\alpha))^{0.5}$  e aplique a transformação de congruência

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \mathcal{W}(\alpha)^T \\ \mathcal{B}^\perp(\alpha)^T \end{bmatrix} (\mathcal{Q}(\alpha) - \mu(\alpha) \mathcal{B}(\alpha)^T \mathcal{B}(\alpha)) \begin{bmatrix} \mathcal{W}(\alpha) & \mathcal{B}^\perp(\alpha) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathcal{W}(\alpha)^T \mathcal{Q}(\alpha) \mathcal{W}(\alpha) - \mu(\alpha) \mathbf{I} & \mathcal{W}(\alpha)^T \mathcal{Q}(\alpha) \mathcal{B}^\perp(\alpha) \\ \star & \mathcal{B}^\perp(\alpha)^T \mathcal{Q}(\alpha) \mathcal{B}^\perp(\alpha) \end{bmatrix} < 0
 \end{aligned} \tag{A.11}$$



Como o bloco  $(\mathbf{2}, \mathbf{2})$  (A.11) é definido negativo (por hipótese), conclui-se que existe  $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^+$  suficiente grande tal que a condição acima seja verificada. Resta mostrar que  $iii) \Rightarrow iv)$ . Para isso, basta escolher  $\mathcal{X}(\boldsymbol{\alpha}) = -\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})\mathcal{B}(\boldsymbol{\alpha})^T/2$ . ■

#### A.4 LINEARIZAÇÃO

Nas provas dos teoremas dos capítulos 3-5 desta tese é utilizada uma ferramenta para linearizar e tornar convexas as LMIs de estabilizações. Essa ferramenta é representada pela seguinte desigualdade

$$-\mathbf{M}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{M} \leq \mathbf{G} - \mathbf{M}^T - \mathbf{M}, \quad (\text{A.12})$$

e ela é assegurada para todos os pares de matrizes quadradas  $\mathbf{M}$  de rank completo e  $\mathbf{G} = \mathbf{G}^T > \mathbf{0}$ . A partir de

$$(\mathbf{M} - \mathbf{G})^T \mathbf{G}^{-1} (\mathbf{M} - \mathbf{G}) \geq \mathbf{0}, \quad (\text{A.13})$$

mostra-se que (A.13) é verdadeira. Para maiores detalhes veja (GEROMEL; KOROGUI; BERNUSSOU, 2007).



## **APÊNDICE B – Descrição da modelagem fuzzy dos exemplos utilizados**



Neste apêndice são apresentadas descrições auxiliares para o entendimento do procedimento de obtenção dos modelos fuzzy T-S dos sistemas não lineares apresentados no Exemplo 2.2.1 do Capítulo 2.

## B.1 SISTEMAS ACADÊMICOS

Considere o sistema não linear discreto no tempo com atraso nos estados (2.18). Esse sistema pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -3x_{1,k} & 0.25f(x_{2,k})/x_{2,k} \\ -2 & 0.65f(x_{2,k})/x_{2,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0.1x_{1,k} & -0.2x_{1,k} \\ 0 & -0.1x_{1,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k-d_k} \\ x_{2,k-d_k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \end{bmatrix} u_k, \quad (\text{B.1})$$

em que  $f(x_{2,k})$  está definido em (2.19).

Respeitando a região de operação determinada para esse sistema no Exemplo 2.2.1, podem ser obtidos tanto os conjuntos fuzzy quanto as matrizes do sistema fuzzy (2.2) de acordo com a descrição da obtenção de um modelo fuzzy apresentada na Seção 2.2. Um fato interessante no sistema não linear em questão é que a função  $f(x_{2,k})$  é linear para uma faixa de operação  $x_{2,k} \in \mathcal{I}[-3, 3]$  e não linear para o restante da faixa de operação de  $x_{2,k}$ . Levando essa questão em consideração, as matrizes apresentadas em (2.25) podem ser obtidas a partir da substituição dos valores máximos e mínimos das variáveis de premissas, que são  $x_{1,k}$  e  $f(x_{2,k})/x_{2,k}$ , em (B.1) dentro da região de operação pré-determinada. O fato de se ter duas variáveis de premissas, resulta em quatro regras fuzzy SE-ENTÃO. Sendo que para a primeira regra, consideram-se os valores máximos tanto para  $x_{1,k}$  quanto para  $f(x_{2,k})/x_{2,k}$ . Para a segunda regra, tem-se o valor mínimo para  $x_{1,k}$  e o valor máximo para  $f(x_{2,k})/x_{2,k}$ . Para a terceira regra, consideram-se o valor máximo para  $x_{1,k}$  e o valor mínimo para  $f(x_{2,k})/x_{2,k}$ . Sendo que esse valor mínimo é 3. E por fim, a última regra é composta pelos valores mínimos tanto de  $x_{1,k}$  quanto de  $f(x_{2,k})/x_{2,k}$ . Assim, chega-se nas matrizes apresentadas em (2.25).

Para a obtenção do vetor de função de pertinência, têm-se as mesmas ordens de máximos e mínimos apresentadas anteriormente. Sendo assim,

$$M_{11}(x_{1,k}) = M_{31}(x_{1,k}) = \frac{x_{1,k} - \min(x_{1,k})}{\max(x_{1,k}) - \min(x_{1,k})} \quad (\text{B.2})$$

e

$$M_{21}(x_{1,k}) = M_{41}(x_{1,k}) = \frac{\max(x_{1,k}) - x_{1,k}}{\max(x_{1,k}) - \min(x_{1,k})}. \quad (\text{B.3})$$

Quando  $|x_{2,k}| < 3$ , tem-se  $M_{12}(x_{2,k}) = M_{22}(x_{2,k}) = 0$  e  $M_{32}(x_{2,k}) = M_{42}(x_{2,k}) = 1$ . Caso contrário

$$M_{12}(x_{2,k}) = M_{22}(x_{2,k}) = \frac{x_{2,k}^2 - \min(x_{2,k}^2)}{\max(x_{2,k}^2) - \min(x_{2,k}^2)} \quad (\text{B.4})$$

e

$$M_{32}(x_{2,k}) = M_{42}(x_{2,k}) = \frac{\max(x_{2,k}^2) - x_{2,k}^2}{\max(x_{2,k}^2) - \min(x_{2,k}^2)}. \quad (\text{B.5})$$

E assim, obtém-se o vetor de função de pertinência como mostrado em (2.24). Nas Figuras 18–21 são apresentados o comportamento do vetor de função de pertinência no interior da região de operação determinada. Note que o valor de cada elemento do vetor é sempre positivo e menor que 1.

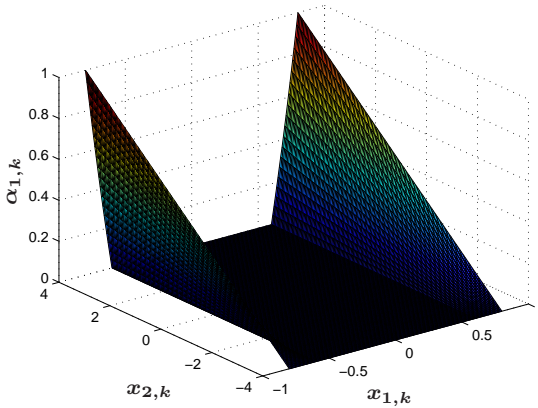


Figura 18 – Elemento  $\alpha_{1,k}$  do vetor de função de pertinência.

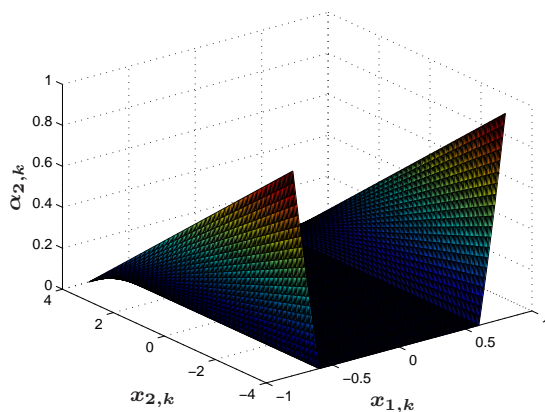


Figura 19 – Elemento  $\alpha_{2,k}$  do vetor de função de pertinência.

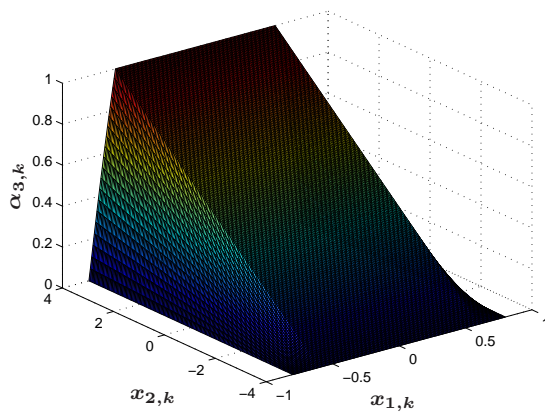


Figura 20 – Elemento  $\alpha_{3,k}$  do vetor de função de pertinência.

## B.2 SISTEMA COM MOTIVAÇÃO PRÁTICA

Assim como feito para o sistema não linear acadêmico, para o sistema não linear com motivação prática também é apresentada a descrição de como obter o modelo fuzzy do sistema do levitador magnético

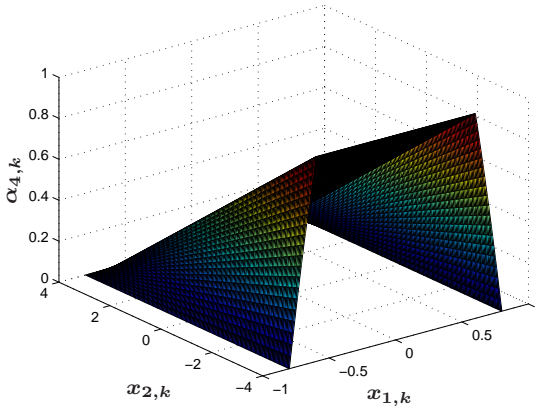


Figura 21 – Elemento  $\alpha_{4,k}$  do vetor de função de pertinência.

apresentado em (2.27). Seguindo o mesmo procedimento, esse sistema não linear pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{Tg\mu(\mu x_{1,k} + 2\mu y_0 + 2)x_{1,k}}{(1 + \mu(x_{1,k} + y_0))^2} \end{bmatrix} c \left( 1 - \frac{TK_m}{m} \right) \\
 &\times \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & (1-c)T \\ 0 & (1-c) \left( 1 - \frac{TK_m}{m} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k-d_k} \\ x_{2,k-d_k} \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{T\lambda\mu}{2m(1 + \mu(x_{1,k} + y_0))^2} \end{bmatrix} u_k, \quad (\text{B.6})
 \end{aligned}$$

sendo que todas as variáveis estão devidamente apresentadas no Exemplo 2.2.1.

Para obter o modelo fuzzy T-S do sistema não linear em questão, primeiramente deve-se determinar a região de operação. Após isso, determinam-se as matrizes que vão compor o sistema fuzzy T-S (2.2). Para isso é necessário definir as variáveis de premissa, que para esse sistema são:

$$z_1(x_{1,k}) = \frac{Tg\mu(\mu x_{1,k} + 2\mu y_0 + 2)x_{1,k}}{(1 + \mu(x_{1,k} + y_0))^2} \quad (\text{B.7})$$



e

$$z_2(x_{1,k}) = \frac{T\lambda\mu}{2m(1 + \mu(x_{1,k} + y_0))^2}, \quad (\text{B.8})$$

sendo que ambas dependem somente do estado  $x_{1,k}$ . Diante disso, para a obtenção das matrizes (2.30), inicialmente substituem-se as não linearidades em (B.6) pelas variáveis de premissas. Após isso, calculam-se os valores máximos e mínimos de cada variável de premissa. Assim, montam-se as regras SE-ENTÃO. Sendo assim, para a primeira regra consideram-se os valores máximos de ambas as variáveis. Na segunda regra, consideram-se o valor mínimo de  $z_1(x_{1,k})$  e o valor máximo de  $z_2(x_{1,k})$ . Para a terceira regra, têm-se o valor máximo de  $z_1(x_{1,k})$  e o valor mínimo de  $z_2(x_{1,k})$ . Por fim, têm-se os valores mínimos de ambas as variáveis de premissa.

Respeitando as ordens utilizadas para a obtenção das regras, obtêm-se os conjuntos fuzzy como mostrados em (2.29). Assim, chega-se no vetor de função de pertinência (2.29). Na Figura 22 são apresentadas as curvas do vetor de função de pertinência (2.29). Note que no interior da região de operação, os valores dos elementos desse vetor são sempre positivos e menores que 1. Vale destacar que os valores de  $\alpha_{1,k}$  e  $\alpha_{4,k}$  são iguais, por isso nessa figura são identificadas três curvas.

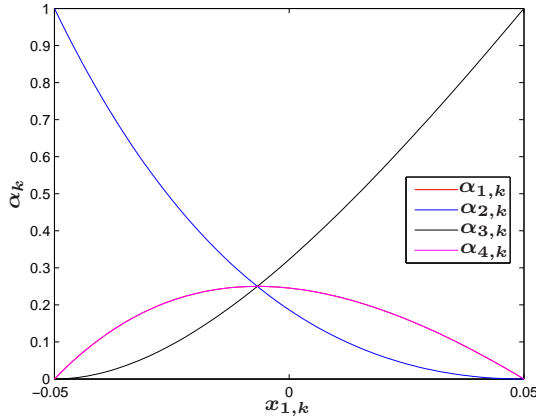


Figura 22 – Vetor de função de pertinência do modelo fuzzy T-S do levitador magnético.



## APÊNDICE C – Manipulações algébricas



## C.1 MATRIZ DE MALHA FECHADA DE UM SISTEMA FUZZY T-S

Considere a seguinte matriz de malha fechada:

$$\hat{A}(\alpha_k) = A(\alpha_k) + B(\alpha_k)K(\alpha_k). \quad (C.1)$$

Sabe-se que as matrizes  $A(\alpha_k)$ ,  $B(\alpha_k)$  e  $K(\alpha_k)$ , podem ser representadas pela combinação convexa apresentada em (2.5) para as duas primeiras e em (2.32) para a última. Portanto, tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{A}(\alpha_k) &= \sum_{i=1}^N \alpha_{k(i)} A_i + \sum_{i=1}^N \alpha_{k(i)} B_i \sum_{i=1}^N \alpha_{k(i)} K_i \\ &= \left( \sum_{i=1}^N \alpha_{k(i)} \right) \sum_{i=1}^N \alpha_{k(i)} A_i + \sum_{i=1}^N \alpha_{k(i)} B_i \\ &\quad \times \sum_{i=1}^N \alpha_{k(i)} K_i \\ &= \sum_{i=1}^N \alpha_{k(i)}^2 (A_i + B_i K_i) + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \alpha_{k(i)} \\ &\quad \times \alpha_{k(j)} \frac{A_i + B_i K_j + A_j + B_j K_i}{2}, \end{aligned} \quad (C.2)$$

O termo do lado esquerdo da última linha de (C.2) pode ser reescrito de forma compacta a partir da utilização de uma variável  $\sigma_{ij}$  definida como:

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{se } i \neq j, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (C.3)$$

Assim, tem-se

$$\hat{A}(\alpha_k) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^N \sigma_{ij} \alpha_i \alpha_j \frac{A_i + B_i K_j + A_j + B_j K_i}{2}. \quad (C.4)$$